TEOREMI FONDAMENTALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

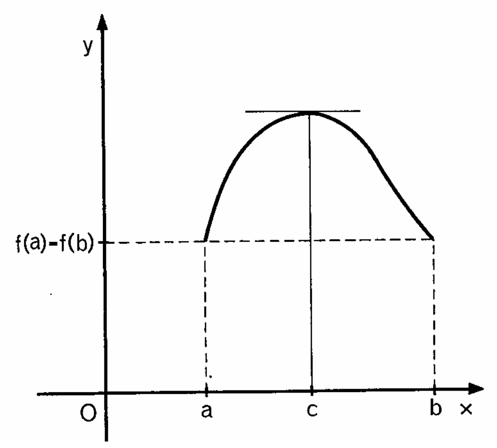
Teorema di Rolle [*]

Se una funzione y=f(x) continua nell'intervallo chiuso [a, b] e derivabile in (a, b),assume agli estremi a e b dell'intervallo valori uguali (cioè f(a)=f(b)), allora esiste almeno un punto c ∈[a, b] nel quale la derivata della funzione si annulla, cioè

$$f'(c) = 0$$

Interpretazione geometrica

Le ipotesi e la tesi del teorema, tradotte in termini geometrici, si esprimono così:
1ª ipotesi: **f(x) è continua in [a, b]** ⇒ il grafico della funzione è un arco di curva continuo
2ª ipotesi: **f(x) derivabile in (a, b)** ⇒ l'arco di curva è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi.
3ª ipotesi: **f(x) assume valori uguali agli estremi dell'intervallo** ⇒ gli estremi dell'arco devono avere la stessa ordinata: f(a)=f(b).
Tesi: **∃ c∈[a, b] tale che f '(c)=0** ⇒ se valgono le suddette ipotesi, allora esiste almeno un punto c, interno all'arco, nel quale la retta tangente è parallela all'asse x (se f ' (c)=0 ⇒ il coefficiente angolare della tangente è 0 ⇒ la tangente è parallela all'asse x).



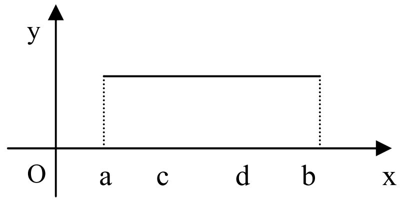
Dimostrazione
Poiché la funzione è continua in [a, b], essa è ivi dotata di massimo *M* e minimo *m* (per il teorema di Weierstrass) assoluti.
Esisteranno allora due punti c e d di (a, b) in cui f(c)=*m* e f(d)=*M* e si avrà:

$$\boxed{m = f(c) \le f(x) \le f(d) = M} \qquad (1)$$

Possono presentarsi due casi:

1°) ***m=M***

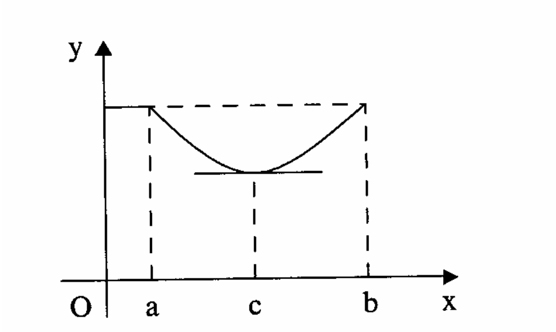
Se m=M la (1) diventa $m = f(c) = f(x) = f(d) = M$ ⇒ f(x) è costante in [a, b] e quindi la sua derivata sarà nulla in ∀ x∈ [a, b].



[*] Michel Rolle (1652-1719), matematico francese, scrisse nel 1690 il "Traité d'algèbre", che conteneva il teorema di tipo differenziale che ancora oggi porta il suo nome.

2°) ***m<M***

Se $m<M$, almeno uno dei due punti c e d apparterrà all'intervallo.



Supponendo che sia c tale punto, poiché in c la funzione assume il valore minimo *m*, risulterà f(x) ≥ f(c) ovvero f(x) - f(c) ≥0.

Considerando il rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ si avrà $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ per x>c oppure $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ per x<c.

Passando ai limiti si ha:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

e poiché f(x) per ipotesi è derivabile in c, i due limiti devono coincidere con f '(c).

Dalle due precedenti disuguaglianze risulta: f '(c) ≤0 e f '(c) ≥0 ⇒ f '(c)=0 e quindi esiste un punto appartenente all'intervallo in cui la derivata si annulla.

c.d.d.

Osservazioni

1. Tutte le ipotesi del teorema devono essere soddisfatte altrimenti il teorema può non risultare verificato.

2. L'affermazione "*esiste almeno un punto in cui la tangente alla curva è parallela all'asse x*" non esclude che di tali punti ve ne sia più di uno.

Teorema di Lagrange♦ (o del valor medio)

Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo chiuso [a, b] e derivabile nell'intervallo aperto (a, b); esiste allora almeno un punto $c \in (a, b)$ nel quale risulti:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Interpretazione geometrica

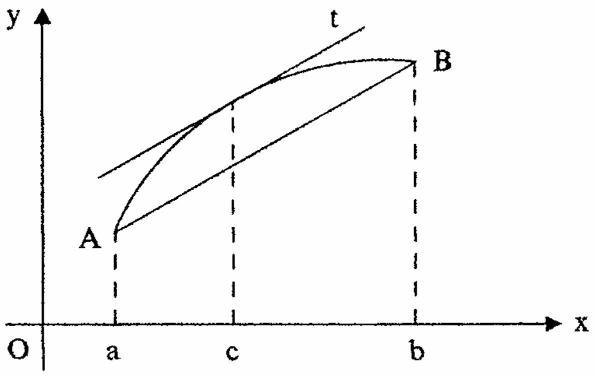
Le ipotesi e la tesi del teorema, tradotte in termini geometrici, si esprimono così:

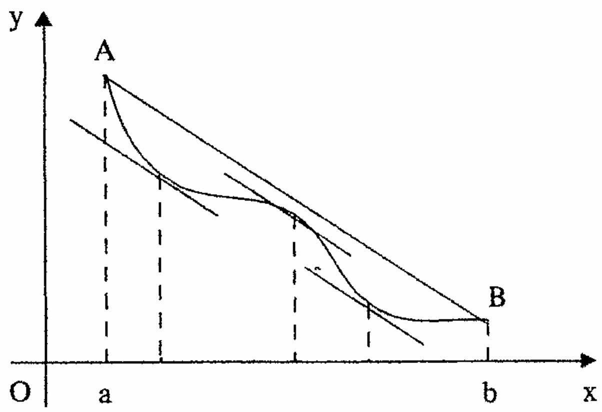
<u>*1ª ipotesi*</u>: **f(x) è continua in [a, b]** $\Rightarrow$ il grafico della funzione è un arco di curva continuo.

<u>*2ª ipotesi*</u>: **f(x) derivabile in (a, b)** $\Rightarrow$ l'arco di curva è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi.

<u>*Tesi*</u>: **$\exists$ c$\in$[a, b] tale che** $\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$ $\Rightarrow$ se valgono le suddette ipotesi, allora esiste almeno un punto c, interno all'arco, nel quale la retta tangente è parallela alla corda che congiunge i punti estremi dell'arco stesso.

Ciò implica che, essendo $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ il coefficiente angolare della retta AB e $f'(c)$ il coefficiente angolare della retta tangente t all'arco nel punto di ascissa c, dal parallelismo delle due rette AB e t segue che: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.





Dimostrazione

Costruiamo una funzione φ(x) che soddisfi le condizioni del teorema di Rolle:

$$\varphi(x) = f(x) - kx$$

con k costante da determinarsi in modo che φ(x) assuma valori uguali agli estremi dell'intervallo [a, b].

Per determinare tale valore di k, si pone φ(a)=φ(b) e poiché φ(a)=f(a)-ka, φ(b)=f(b)-kb $\Rightarrow$ f(a)-ka=f(b)-kb da cui

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

Attribuendo a k il valore(1), la funzione φ(x) verifica tutte le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:

- è continua perché differenza di funzioni continue in [a, b];
- è derivabile in (a, b) perché differenza di funzioni derivabili;
- assume valori uguali agli estremi dell'intervallo[a, b], cioè risulta φ(a) = φ(b).

Allora esiste un punto c$\in$(a, b) in cui risulta φ '(c) = 0.

Ma φ '(c)=0 può essere scritta nella forma f '(c) – k = 0 $\Rightarrow$ f '(c) = k   (2)

♦ Giuseppe Luigi Lagrange (Torino 1736-Parigi1813) e confrontando la (2) con la (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)} \qquad (3)$$

c.d.d.

Osservazioni

1. L'affermazione "*esiste almeno un punto in cui la tangente alla curva è parallela alla corda AB*" non esclude che di tali punti ve ne sia più di uno.

2. Se alle ipotesi del teorema di Lagrange si aggiunge l'ulteriore ipotesi che sia f(a)=f(b), allora dalla (3) si ricava f '(c) = 0 e quindi il *teorema di Rolle* può essere considerato un *caso particolare* del *teorema di Lagrange.*

3. Tutte le ipotesi del teorema devono essere soddisfatte altrimenti il teorema può non risultare verificato.

Teorema di Cauchy ♣ (o degli incrementi finiti)

Se f(x) e g(x) sono due funzioni continue nell'intervallo [a, b] , derivabili in (a, b) e se g '(x) ≠0 per ∀x∈(a, b), esiste allora almeno un punto c∈(a, b) in cui si verifica che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dimostrazione

Per ipotesi si ha g '(x) ≠0 per ∀x∈(a, b), quindi g(b)-g(a) ≠0.
Se invece fosse g(b)-g(a)= 0 ⇒ g(b)=g(a) ⇒ per il teorema di Rolle g '(x) dovrebbe annullarsi almeno in un punto di [a, b] ma ciò va contro l'ipotesi.
Premesso questo, per dimostrare il teorema, si considera la funzione ausiliaria $\varphi(x)=f(x)-kg(x)$, continua in [a, b] e derivabile in (a, b), dove k indica una costante da determinarsi in modo che la funzione φ(x) assuma valori uguali agli estremi dell'intervallo [a, b].
Il valore di k, per cui è φ(a)= φ(b) cioè f(a)-kg(a) = f(b)-kg(b), è

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad (4)$$

La funzione ausiliaria così costruita soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle e, pertanto, dovrà esistere almeno un punto c ∈[a, b] nel quale φ '(c) =0 cioè f '(c) – k g '(c) = 0 e. essendo per ipotesi g '(c) ≠0, si ha

$$k=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (5)$$

Confrontando la (4) con la (5) si ricava $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

c.d.d.

Osservazione

Se la seconda funzione fosse g(x)=x risulterebbe g '(c) = 1, g(b) = b, g(a) = a e, per il teorema di Cauchy, si avrebbe $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ ⇒ il *teorema di Lagrange* può essere considerato un *caso particolare* del *teorema di Cauchy.*

Teorema di De L'Hospital ♠ (o regola di De L'Hospital)

Siano f(x) e g(x) due funzioni derivabili in un intorno I di un punto x_0, escluso al più x_0, con g'(x)≠0 ***Se*** *f(x) e g(x) sono continue in I (x_0) e tali che f(x_0) = g(x_0) =0, oppure se* $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, *oppure se* $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ *e se esiste (finito o infinito) il* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, ***allora*** *esiste anche il* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *e risulta:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♣ Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematico francese.
♠ Guillaume François-Antoine De L'Hospital (1661-1704), matematico francese.

Osservazioni

1. La regola di De L'Hospital agevola il calcolo di molti limiti di forme indeterminate.

2. L'applicazione della regola di De L'Hospital, a volte, non è conveniente o addirittura inefficace perché fa passare da una forma indeterminata ad un'altra innescando un circolo vizioso.

3. Il teorema è valido anche nel caso in cui x_0 rappresenta uno dei simboli: $+\infty$, $-\infty$, ∞.

4. Se il limite del rapporto delle derivate si presenta anch'esso come una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ e le funzioni f '(x) e g '(x) soddisfano le ipotesi del teorema, si può passare al limite del quoziente delle derivate seconde e così via finché si giunge ad un limite determinato.

5. La regola può essere applicata anche a forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ mediante particolari accorgimenti:
   - Se la forma è del tipo $\boxed{0 \cdot \infty}$ si può utilizzare l'identità
     $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ oppure $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$

     e il limite verrà così a presentarsi nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$; si potrà quindi applicare la regola di De L'Hospital.
   - Se la forma è $\boxed{\infty - \infty}$, si può utilizzare l'identità $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$ e il limite verrà così a presentarsi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e si potrà quindi applicare la regola di De L'Hospital.

6. Il teorema di De L'Hospital fornisce una condizione *sufficiente*, ma non necessaria, per l'esistenza del limite di una funzione del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$, cioè vale l'implicazione diretta

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

   ma non vale l'implicazione inversa $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$

Conseguenze del teorema di Lagrange

- **Teorema**

Se una funzione continua in un intervallo [a, b] ha derivata nulla in tutti i punti di (a, b), allora essa è costante in [a, b].

Dimostrazione
Detto x un qualunque punto di (a, b) diverso da a, applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo [a, x] $\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ con a < c < x.

Poiché per ipotesi è f '(c) = 0 $\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \Rightarrow f(x)\text{-}f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a) \Rightarrow$ la f(x) assume in tutti i punti dell'intervallo il valore f(a) $\Rightarrow$ **f(x)** è **costante.**

c.d.d.

- **Teorema**

Se due funzioni continue f(x) e g(x) hanno derivate uguali in tutti i punti di un intervallo, allora esse differiscono per una costante.

Dimostrazione
Consideriamo la funzione ausiliaria φ(x) = f(x) - g(x) $\Rightarrow$ φ '(x) = f '(x) - g '(x) ma per ipotesi è f '(x) = g '(x) $\Rightarrow$ φ '(x) = f '(x) - g '(x) = 0 ma, per il precedente teorema, se una funzione ha derivata nulla in un intervallo allora essa è costante in quell'intervallo $\Rightarrow$ φ(x) = costante ossia f(x) - g(x) = costante.

c.d.d.

- **Funzioni crescenti e funzioni decrescenti in un intervallo**

Applicando il teorema di Lagrange, è possibile mettere in evidenza una connessione tra l'andamento crescente o decrescente di una funzione e il segno della sua derivata prima in intervallo [a, b].
Sappiamo che una funzione f(x) è *crescente in senso stretto* in [a, b] se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

e che è invece *decrescente in senso stretto* in [a, b] se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Considerando funzioni derivabili si ha, in conseguenza del teorema di Lagrange, il seguente **corollario**:

*Sia f(x) una funzione continua in un intervallo [a, b] e derivabile in (a, b). Se **la derivata** della funzione **è sempre positiva**, allora **la funzione è crescente** in senso stretto in [a, b].*
*Se **la derivata** della funzione **è sempre negativa**, allora **la funzione è decrescente** in senso stretto in [a, b].*

In simboli: se ***f '(x)>0*** in (a, b) $\Rightarrow$ ***f(x) crescente*** in [a, b];
se ***f '(x)<0*** in (a, b) $\Rightarrow$ ***f(x) decrescente*** in [a, b].

Dimostrazione
Siano x_1 e x_2 due punti $\in$[a, b], con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange applicato all'intervallo

$[x_1, x_2] \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ con $c \in (x_1, x_2)$.

Ma, essendo per ipotesi f '(x)>0 ⇒ f '(c)>0 ⇒ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ e poiché è $x_2 > x_1$ si ha $x_2 - x_1 > 0$ e quindi sarà $f(x_2) > f(x_1)$ ⇒ la ***funzione è crescente*** in senso stretto in [a, b].
In modo analogo si dimostra che se f '(x) è negativa, la funzione è decrescente in senso stretto in [a, b].

- **Funzioni crescenti o decrescenti in un punto**

  - ✓ Si dice che la funzione ***f(x)*** è ***crescente in un punto*** $x_0 \in [a, b]$ se esiste un intorno completo di x_0 in cui essa è crescente.
  - ✓ Si dice che la funzione ***f(x)*** è ***decrescente in un punto*** $x_0 \in [a, b]$ se esiste un intorno completo di x_0 in cui essa è decrescente.

Teorema

Se la funzione f(x) è derivabile in (a, b) e la sua derivata f '(x) è continua nel punto $x_0 \in (a, b)$ e positiva, allora la funzione f(x) è crescente in x_0; se invece è f '(x) è negativa la funzione è decrescente in x_0.

In simboli: se ***f '(x)>0*** ⇒ ***f(x) crescente*** in x_0
se ***f '(x)<0*** ⇒ ***f(x) decrescente*** in x_0