Studio di una funzione

Schema esemplificativo

Generalità

Studiare una funzione significa determinarne le proprietà ovvero

- Il dominio.
- Il segno.
- Gli intervalli in cui cresce o decresce.
- Minimi e massimi relativi.
- Gli intervalli in cui è concava o convessa.
- I flessi.
- Gli asintoti.

Dominio della funzione

Per ricercare il dominio della funzione $f(x)$ bisogna prima classificare la funzione stessa e in base alle sue caratteristiche ricercare il campo di esistenza.

Dominio della funzione

- Ad esempio, se $f(x)$ è razionale intera il dominio è R.
- Se è razionale fratta occorre trovare gli zeri a, b, … del denominatore. Il dominio è allora $R-\{a, b, \ldots\}$.
- Se la funzione è irrazionale algebrica per ogni radicale di indice pari bisogna imporre la non negatività del radicando.
- Se è logaritmica è necessario che l'argomento sia positivo.

Segno della funzione

Studiare il segno della funzione significa determinare in quali intervalli il suo grafico è situato al di sopra o al di sotto dell'asse delle x.

Segno della funzione

- Bisogna risolvere la disequazione

  $f(x)>0$

  per individuare gli intervalli di positività della funzione.
- Le soluzioni della disequazione

  $f(x)<0$

  individuano gli intervalli di negatività della funzione.

Intersezioni con gli assi

Risolvendo l'equazione

$f(x)=0$

si individuano gli eventuali punti di intersezione del grafico con l'asse delle x (zeri della funzione $f(x)$).

Intersezioni con gli assi

Ponendo

$x=0$ (se $f(x)$ è ivi definita)

si trova invece l'eventuale punto di intersezione del grafico con l'asse delle y.

Minimi e massimi relativi

Per trovare i minimi e i massimi relativi di una funzione $f(x)$, derivabile nei punti interni del suo dominio, si possono utilizzare due metodi.

Minimi e massimi relativi

<u>Primo metodo</u>

Si calcola $f'(x)$ e se ne studia il segno.

- Negli intervalli in cui $f'(x)>0$ la funzione data è crescente.
- Negli intervalli in cui $f'(x)<0$ la funzione è decrescente.

Minimi e massimi relativi

- Se per $x<a$ la funzione è crescente e per $x>a$ la funzione è decrescente, allora in $x=a$ c'è un punto di massimo relativo.
- Se invece la decrescenza precede la crescenza, allora $x=a$ è un punto di minimo relativo.

Minimi e massimi relativi

- Si calcola infine il valore del minimo o massimo trovato sostituendo il numero reale *a* alla variabile *x* nell'espressione della funzione.

Minimi e massimi relativi

Secondo metodo

- Se $f(x)$ è dotata di $f'(x)$ e $f''(x)$ continue in a, allora la funzione ha un minimo relativo nel punto considerato se

  $f'(a) = 0$ e $f''(a)>0$.

- Se si verifica invece

  $f'(a)=0$ e $f''(a)<0$

  la funzione ha un massimo relativo in a.

Concavità e convessità

- Se si verifica

  $f''(a)>0$

  la funzione è concava (ha concavità rivolta verso l'alto).
- Se si verifica invece

  $f''(a)<0$

  la funzione è convessa (ha concavità rivolta verso il basso).

Punti di flesso

Per trovare i flessi di una funzione $f(x)$, derivabile nei punti interni del suo dominio, si procede in modo analogo a quello già visto per la determinazione di minimi e massimi relativi.

Punti di flesso

Primo metodo

- Se in $x=a$ si ha il passaggio dalla concavità alla convessità e a appartiene al dominio allora in tale punto si ha un flesso discendente.
- Se invece la convessità precede la concavità allora si ha un flesso ascendente.

Punti di flesso

<u>Secondo metodo</u>

Si determinano le radici *a* dell'equazione $f''(x)=0$.

- Si ha un flesso in $x=a$ solo se la prima derivata, successiva alla seconda, che non si annulla in *a* è di ordine dispari. In tal caso se in *a* si annulla la derivata prima il flesso è a tangente orizzontale.
- Altrimenti è un flesso a tangente obliqua.

Asintoti

Asintoti verticali

- Se il dominio della funzione è del tipo $R\text{-}\{a, b, c,\ldots\}$ bisogna calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to a$.
- Se questo limite è infinito allora c'è l'asintoto verticale di equazione $x=a$.
- Si ripete il calcolo per gli altri punti b, c, … nei quali la funzione non è definita.

Asintoti

- Si procede in modo analogo se il dominio di *f(x)* è un'unione di intervalli e in qualche estremo inferiore o superiore di tali intervalli la funzione non è definita.

Asintoti

Asintoti orizzontali

- Se il limite di $f(x)$, per $x \rightarrow +\infty$, è il numero finito l, allora c'è l'asintoto orizzontale di equazione
  $y=l$.
- Se tale limite è invece infinito si passa all'esame dell'eventuale asintoto obliquo.
- Analogamente per $x \rightarrow -\infty$.

Asintoti

Asintoti obliqui

- Se il limite di $f(x)/x$, per $x \to +\infty$, è infinito non c'è neppure l'asintoto obliquo.
- Se invece tale limite è il numero finito m allora si calcola il limite di $f(x)-mx$. Solo se anche questo limite è un numero finito q possiamo dire che esiste, per $x \to +\infty$, un asintoto obliquo. La sua equazione è $y=mx+q$.
- Analogamente per $x \to -\infty$.