FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Una funzione di più variabili viene indicata come:

  $f : A \to B$ con $A \subseteq R^n$

- Se *n*=2 la funzione presenta due variabili indipendenti e viene normalmente scritta come:

  $z = f(x, y)$

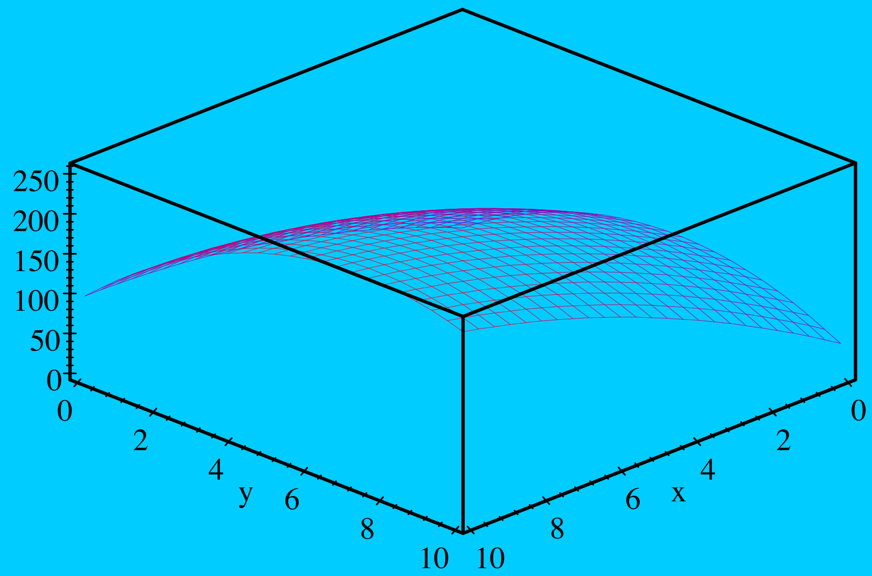
- La sua rappresentazione grafica si realizza introducendo un sistema cartesiano di riferimento riportando sull'asse verticale (!!!) i valori della variabile dipendente *z.*

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Esempio 1
- Il grafico della funzione

$$z = -x^2 + 20x - 3 + 34y - 3y^2 + xy$$

- è:



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

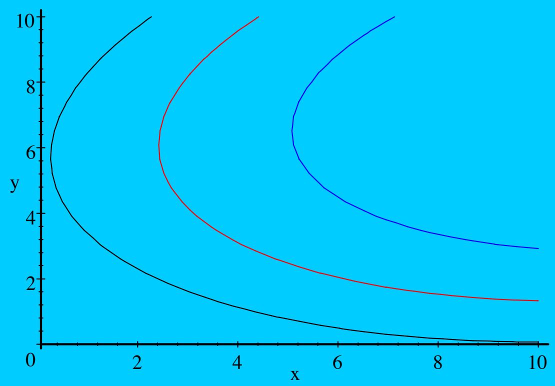
- La funzione di Cobb-Douglas:

$$P = CK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

- dove:
- P=produzione totale
- C=produzione unitaria
- L=unità di lavoro impiegato
- K=unità di capitale investito
- α =costante compresa tra 0 ed 1

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Sezionando il grafico di una funzione di due variabili con un piano parallelo al piano *xy* si ottengono le *curve di livello*. Considerando la funzione dell'esempio 1 e proiettando le curve di livello sul piano *xy* si ottiene:



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Una funzione è omogenea di grado “s” se:

$$f(vx, vy) = v^s f(x, y)$$

- La funzione di Cobb-Douglas è omogenea di grado s=1:
-

$$P(vK, vL) = C(vK)^{\alpha}(vL)^{1-\alpha} =$$

$$= Cv^{\alpha}K^{\alpha}v^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = v^{\alpha}v^{1-\alpha}CK^{\alpha}L^{1-\alpha} = vP(K, L)$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'estensione del concetto di limite di una funzione non è immediata. Infatti la modalità di avvicinamento nel piano *xy* di un punto di coordinate (x, y) ad un punto (x_o, y_o) di accumulazione per il dominio della funzione non è unica ma anzi può avvenire seguendo un numero infinito di traiettorie. Vale il risultato:
- *Il* $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ *è uguale ad "l" se, per ogni successione* $n \to (x_n, y_n)$ *che converge a* (x_o, y_o) *la successione* $n \to f(x_n, y_n)$ *converge ad "l".*

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'estensione della definizione di derivata di una funzione (continua) non è immediato. Infatti il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{(\Delta x, \Delta y)}$$

non ha significato in quanto rapporto di un numero (il numeratore) con una coppia di numeri(il denominatore)!

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Considerando la variazione della funzione (continua) generata dalla variazione di una variabile alla volta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

si ottengono (con le stesse attenzioni delle funzioni di una variabile) le derivate parziali rispetto ad *x* e rispetto ad *y* : $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Il vettore che contiene le derivate parziali della funzione viene denominato gradiente della funzione e viene indicato:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Le derivate parziali per la funzione di C-D sono:
- $$P_K(K,L) = \frac{\partial P}{\partial K} = C \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = \alpha \frac{P}{K}$$

$$P_L(K,L) = \frac{\partial P}{\partial L} = C \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{P}{L}$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'elasticità della produzione rispetto al capitale è:
- $$E_K = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial K}}{\dfrac{P}{K}} = \frac{K}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial K}$$ ovvero $E_K = \alpha$
- L'elasticità della produzione rispetto al lavoro è:
- $$E_L = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial L}}{\dfrac{P}{L}} = \frac{L}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial L}$$ ovvero $E_L = 1 - \alpha$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Derivate di ordine successivo. Le derivate parziali prime in quanto funzioni possono essere derivate a loro volta (naturalmente se soddisfano le condizioni già ricordate), ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

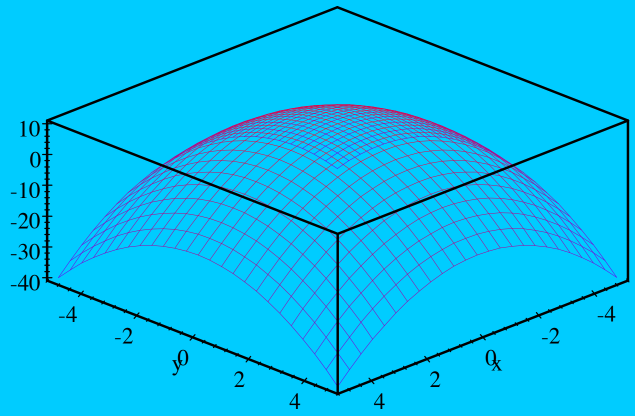
FUNZIONI DI DUE VARIABILI

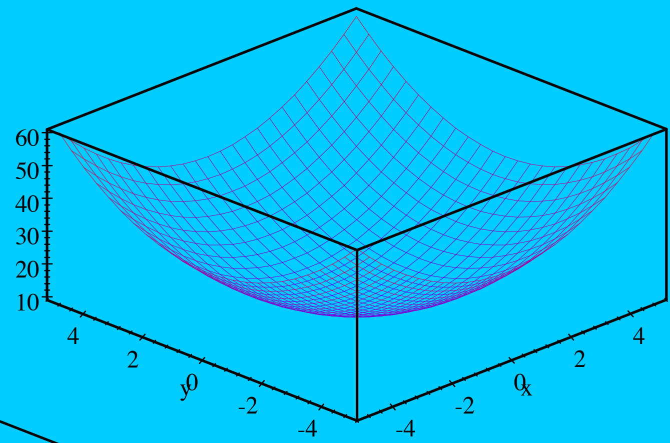
- Le derivate parziali seconde possono essere organizzate in una matrice denominata matrice Hessiana.

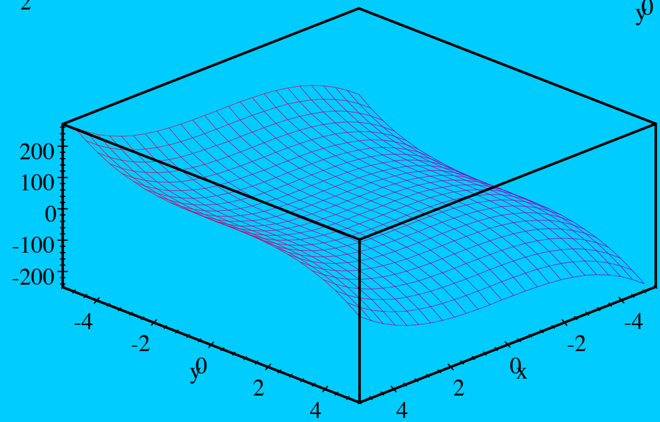
$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Massimi e minimi relativi (liberi) e selle.







FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Le condizioni necessarie e sufficienti sono :

Condizione necessaria

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Condizione sufficiente per avere un massimo relativo

1. $detH(x_o, y_o) > 0$
2. $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$

Condizione sufficiente per avere un minimo relativo

1. $detH(x_o, y_o) > 0$
2. $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$

Condizione sufficiente per avere una sella

$detH(x_o, y_o) < 0$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Esempio 2.
- Determinare la natura dei punti critici della funzione: $f(x,y) = x^3 - y^2 + 6y - 12x + 5$
- Dalle condizioni necessarie: $\begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \\ -2y + 6 = 0 \end{cases}$
- si determinano i candidati: (-2,3) e (2,3).
- La matrice Hessiana è: $H = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Sostituendo le coordinate del primo punto si ha:

- $detH=24>0$
- $f_{xx}(-2,3)= -12$

e quindi in *(-2,3)* la funzione presenta un max.

Sostituendo le coordinate del secondo punto si ha:

- $detH= -24$
- $f_{xx}(2,3)=12$
- $f_{yy}(2,3)=-2$

e quindi in (2,3) la funzione presenta una sella.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Massimi e minimi vincolati.

- La struttura del problema è la seguente:

$$\max_{(x,y)} f(x,y) \qquad\qquad g(x,y)=0$$

- Per risolvere il problema di massimo (minimo) vincolato si introduce la *funzione lagrangiana:*

$$L(\lambda,x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

- dove λ è il ***moltiplicatore*** di Lagrange.
- Il massimo (libero) della funzione di Lagrange (se esiste) equivale al massimo (vincolato) della funzione di partenza $f(x,y)$.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Le condizioni necessarie per la funzione $L(\lambda, x, y)$ sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Il soddisfacimento della prima condizione equivale al soddisfacimento del vincolo, infatti:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)\right] = g(x,y) = 0$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Teorema

Sia (λ_o, x_o, y_o) una soluzione del sistema di equazioni che esprimono le condizioni del primo ordine. Se la funzione lagrangiana è dotata di derivate parziali seconde e il determinante della matrice hessiana in (λ_o, x_o, y_o) è positivo (negativo), allora in (x_o, y_o) la funzione $z = f(x, y)$ presenta un massimo (minimo) relativo e soddisfa il vincolo.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Il moltiplicatore di Lagrange (λ_o) rappresenta "*il costo opportunità del vincolo*".

  Si supponga che si voglia massimizzare la funzione dei ricavi e che il vincolo rappresenti il vincolo di spesa sui mezzi di produzione. Se si aumenta di 1 unità il budget allora i ricavi crescono di circa λ_o unità.

  Questo risultato consente di valutare se conviene aumentare (diminuire) le risorse investite.