Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l’Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

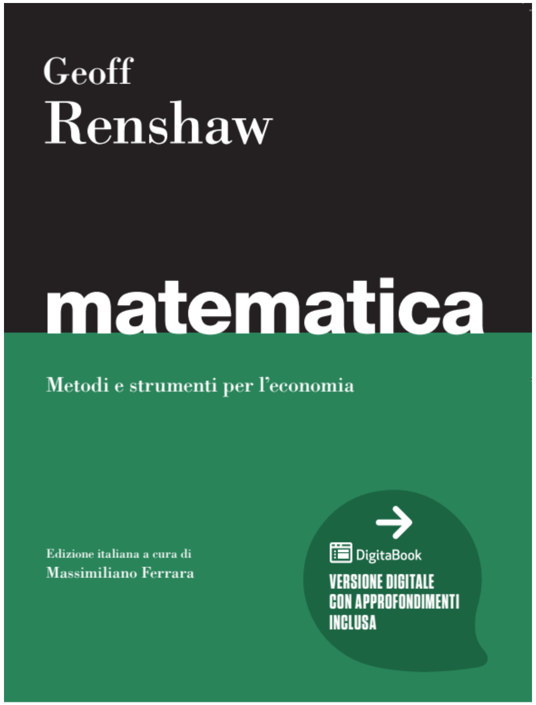
A.A. 2022/2023

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 14 – Integrazione



Integrale definito

Osserva la fig. 14.1.

Possiamo misurare approssimativamente l'area *A* fra *a* e *b* calcolando l'area di uno o più rettangoli disegnati sotto la curva.

All'aumentare del numero di tali rettangoli, l'errore di approssimazione diminuisce.

L'area di uno di questi rettangoli è $f(x_r)(x_{r+1} - x_r)$.

Con *n* rettangoli, l'area totale è $\sum_{r=1}^{n} f(x_r)(x_{r+1} - x_r)$

Per *n* che tende a infinito, questa sommatoria tende a un valore limite, che è l'area *A* cercata.

Scriviamo tale valore limite come

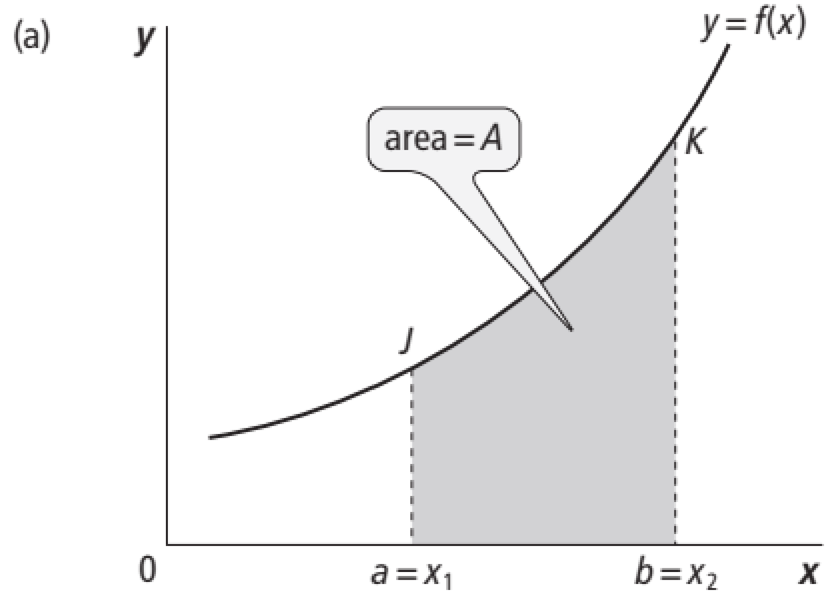
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r)(x_{r+1} - x_r) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

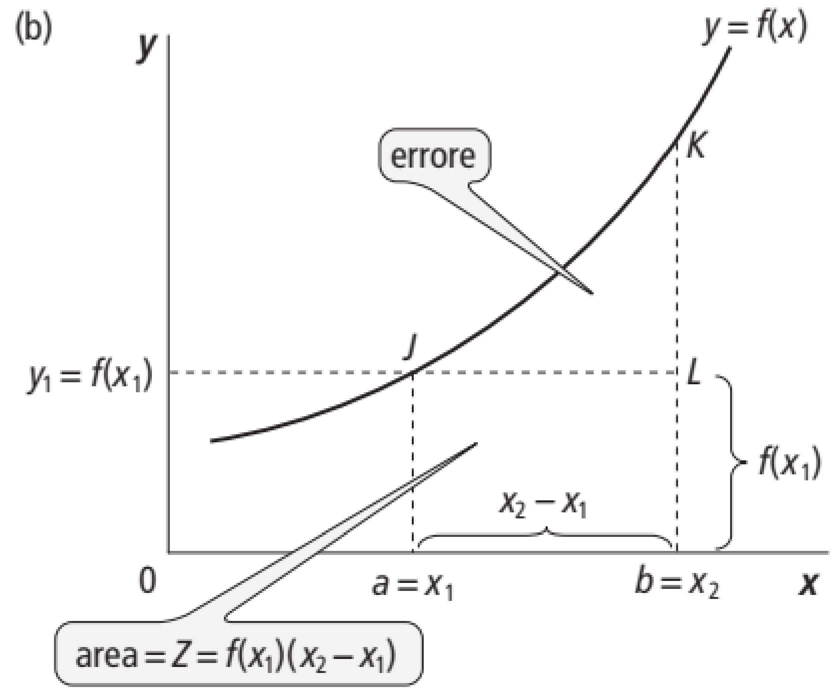
E lo chiamiamo **integrale definito** (Regola 14.1)

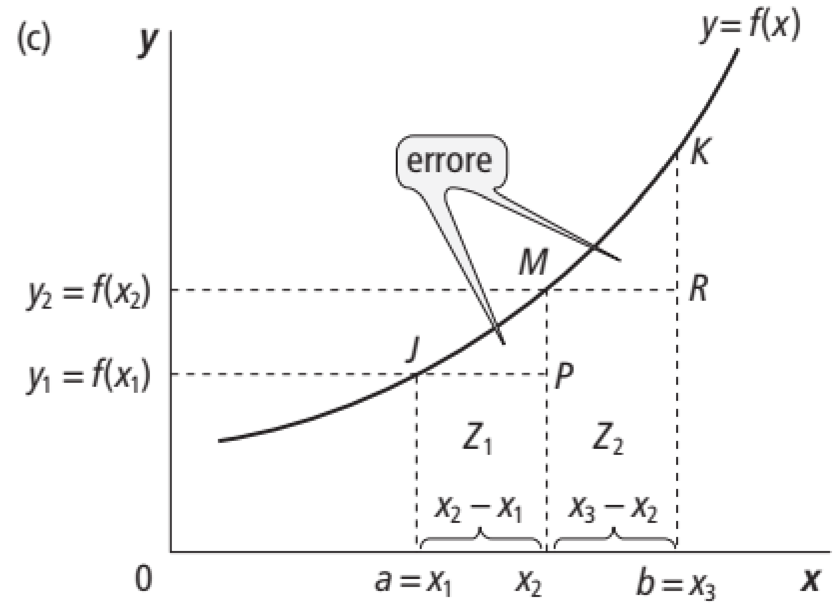
L'integrale indefinito

Osserva la fig. 14.2. L'**integrale indefinito** è ancora un'area, ma con l'estremo superiore non specificato diventa una funzione di *x*. Lo indichiamo con la scrittura $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Figura 14.1 Approssimazione dell'area sottesa da una curva

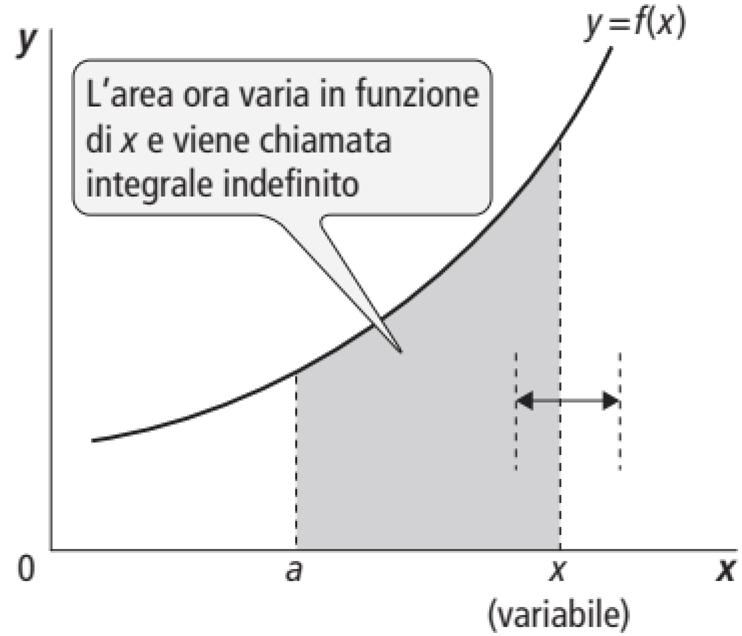



(b)
y
y = f(x)
errore
K
J
y₁ = f(x₁)
L
f(x₁)
x₂ − x₁
0
a = x₁
b = x₂
x
area = Z = f(x₁)(x₂ − x₁)



Aumentando il numero di rettangoli Z_1, Z_2 possiamo ridurre l'errore di approssimazione dell'area sottesa dalla curva.

Figura 14.2 L'integrale indefinito



Primitive

Per calcolare $\int f(x)\mathrm{d}x$ dobbiamo trovare una funzione *F*(*x*) tale che *f*(*x*) è la derivata di *F*(*x*). (Regola 14.2)

Esempio: $\int (2x)\mathrm{d}x = x^2 + c$ dove *c* è una generica costante.

Questa funzione rispetta la Regola 14.2 perché 2*x* è la derivata di $x^2 + c$.

Calcolo dell'integrale indefinito

Ognuna delle seguenti regole è l'inverso di una regola di derivazione. Alcune sono più complicate di altre e molti integrali non possono essere calcolati.

1. Regola della potenza: $\int (x^n)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (Nota che compare una costante additiva arbitraria)

Esempio: $\int (x^3)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + c$

2. Costante moltiplicativa: $\int A(x^n)\mathrm{d}x = A\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (la costante *A* ricompare nell'integrale)

Esempio: $\int (12x^3)\mathrm{d}x = 12\frac{x^4}{4} + c = 3x^4 + c$

Ciò significa che la costante moltiplicativa può essere trasportata fuori o dentro l'integrale. Esempio: $\int (10x)\mathrm{d}x = 5\int (2x)\mathrm{d}x = 5(x^2) + c$

3. Funzione di funzione: $\int [f(x)]^n \mathrm{f}'(x)\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

Esempio: $\int (x^4 + 1)^2 4x^3 \mathrm{d}x = \frac{(x^4+1)^3}{3} + c$

(verificalo derivando)

4. Funzione esponenziale: Ricorda che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$

L'inverso è : $\int e^{f(x)} f'(x)\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$

5. Funzione logaritmica: Ricorda che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$

L'inverso è : $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln[f(x)] + c$

Finding a definite integral

Teorema fondamentale del calcolo integrale (Regola 14.3)

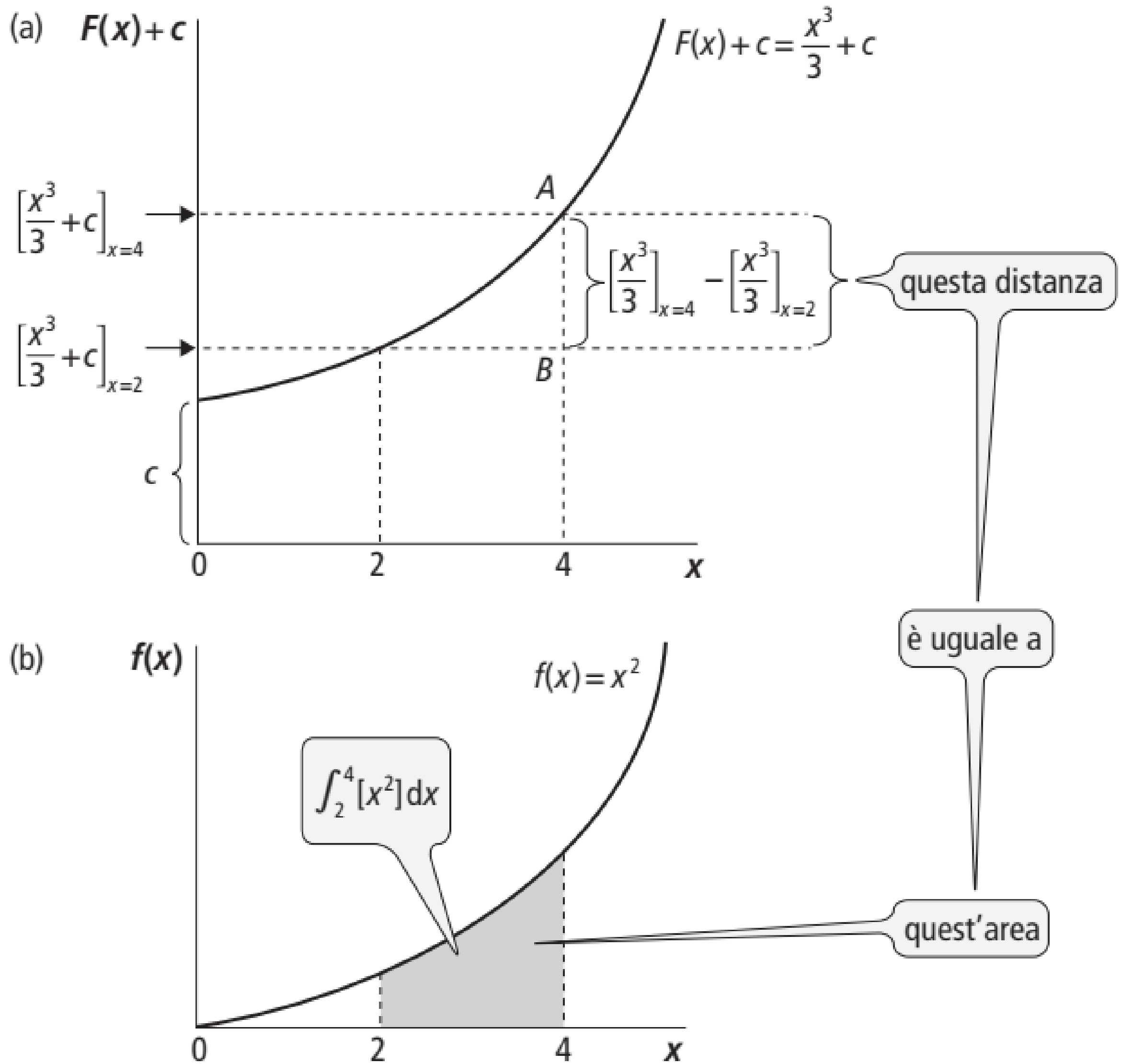
Se $\int [f(x)]\mathrm{d}x = F(x) + c$ allora $\int_a^b [f(x)]\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=b} - [F(x)]_{x=a}$

Esempio: $\int_2^4 [x^2]\ \mathrm{d}x$. Anzitutto troviamo $\int [x^2]\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c$

Poi: $\int_2^4 [x^2]\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + c\right]_{x=4} - \left[\frac{x^3}{3} + c\right]_{x=2} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$

Nota che la costante additiva scompare. Vedi la fig. 14.3.

Figura 14.3 Illustrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale



Applicazione economica 1: dalla funzione *MC* alla funzione *TC*

Se $TC = f(q) + c$ (dove *f*(*q*) = *TVC* = costi totali variabili e *c* = costi fissi costs), allora per definizione $MC = f'(q)$ e dunque

$$\int [MC]\mathrm{d}q = f(q) + c = TVC + \text{costi fissi}$$

(Nota che non possiamo determinare *c* solo dalle informazioni su *MC*)

TVC come area sotto la curva _MC_

Dalla Regola 14.3, $\int_a^b MC\mathrm{d}q = [TVC + c]_{q=b} - [TVC + c]_{q=a}$

Perciò l'area sottesa dalla curva *MC* misura la variazione di *TVC* quando *q* cresce da *q* = *a* a *q* = *b* (vedi la fig. 14.3 e l'Esempio 14.15)

Applicazione economica 2:
dalla funzione *MR* alla funzione *TR*

Se $TR = f(q)$, allora per definizione $MR = f'(q)$ e perciò

$$\int [MR]\mathrm{d}q = f(q) + c = TR + c$$

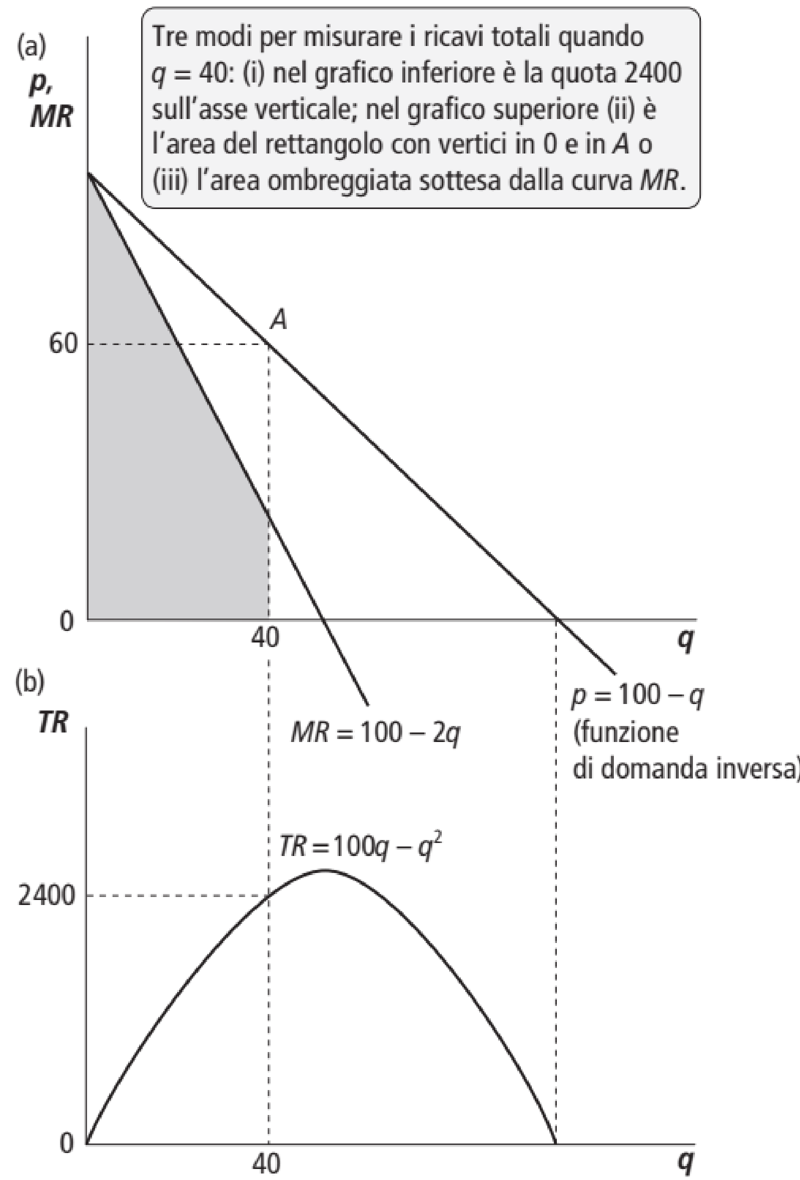
Tuttavia sappiamo che quando *q* = 0, *TR* = 0; perciò *c* deve valere zero. Dunque $\int [MR]\mathrm{d}q = TR$

TR* come area sotto la curva *MR

Dalla Regola 14.3, $\int_a^b MR\,\mathrm{d}q = [TR]_{q=b} - [TR]_{q=a}$

Perciò l'area sottesa dalla curva *MR* misura la variazione di *TR* quando *q* cresce da *a* a *b*. Se *a* = 0, l'area misura *TR* in base alle unità *b* vendute. (Esempio 14.12 e fig. 14.6)

Figura 14.6 Tre modi per misurare i ricavi totali



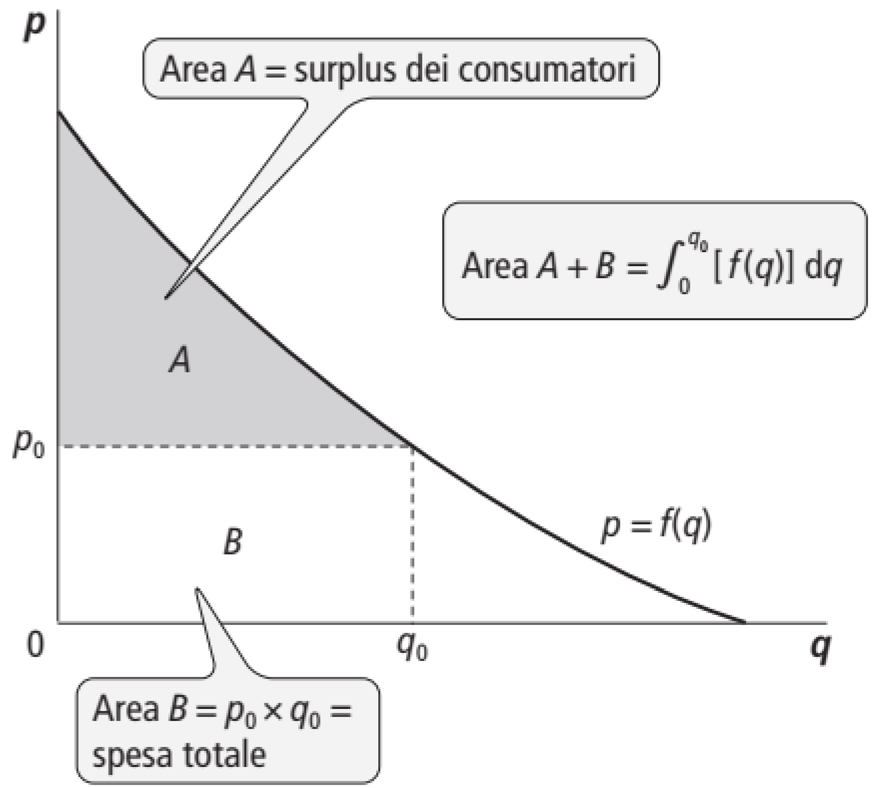
Applicazione economica 3: surplus dei consumatori

Osserva la fig. 14.7. Sotto certe ipotesi, $A + B$ è una misura quantitativa della soddisfazione totale dei consumatori legata al consumo di q_0. Quest'area è detta valutazione dei consumatori. Se da essa sottraiamo la somma che i consumatori devono pagare, p_0q_0 = area B, arriviamo a un beneficio netto, il surplus dei consumatori, rappresentato dall'area A.

Funzione di domanda inversa $p = f(q)$, area $A+B$ = $\int_0^{q_0} f(q)\mathrm{d}q$
Area B = p_0q_0

Perciò il surplus dei consumatori (area A) è $\int_0^{q_0} f(q)\mathrm{d}q - p_0q_0$ (Regola 14.4)

Figura 14.7 Valutazione ($A + B$) e surplus (A) dei consumatori



Applicazione economica 4: surplus dei produttori

Osserva la fig. 14.8. In concorrenza perfetta, la curva *MC* = 3*q* + 5 è la funzione di offerta inversa. Abbiamo visto in precedenza che l'area sottesa dalla curva *MC* è *TVC*.

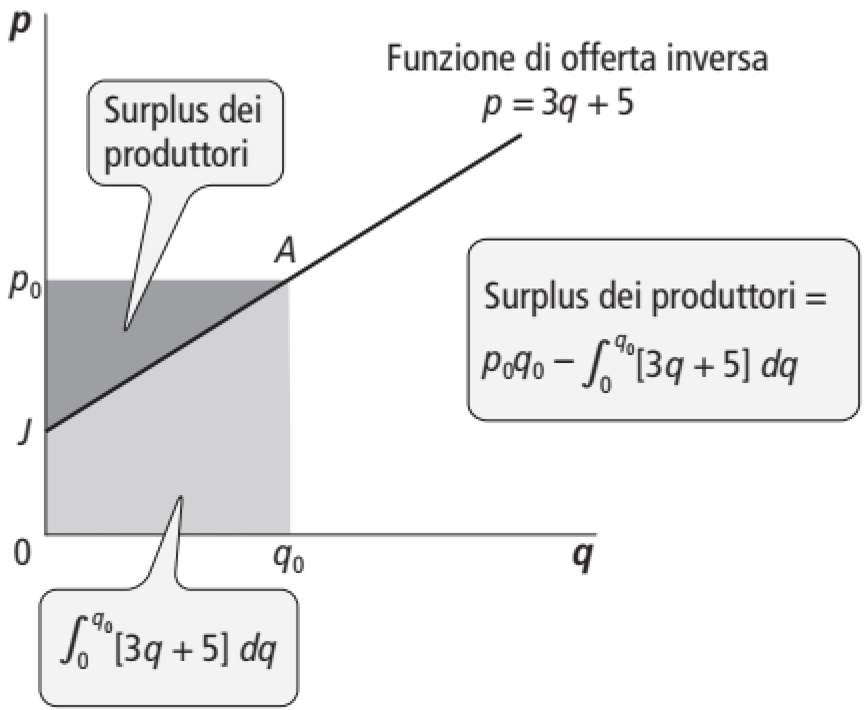
L'area ombreggiata scura è perciò = $\int_0^{q_0}[3q+5]\mathrm{d}q$ = *TVC* dell'output q_0.

Inoltre, area scura + area chiara = $TR = p_0 q_0$

Duque area chiara = surplus dei produttori = $p_0 q_0 - \int_0^{q_0}[3q+5]\mathrm{d}q$ (Regola 14.5)

Inoltre, surplus dei produttori = *TR* − *TVC* = profitti + costi fissi. Esso fornisce la somma massima che i produttori sono disposti a pagare per il diritto di vendere la quantità q_0 al prezzo p_0 (quando l'alternativa è non vendere nulla).

Figura 14.8 Surplus dei produttori



Applicazione economica 5: *VA* di un flusso continuo

Nella Regola 12.7, il *VA* di un singolo pagamento di importo *a* con scadenza in data futura x_0, attualizzato con continuità, è $y = ae^{-rx_0}$

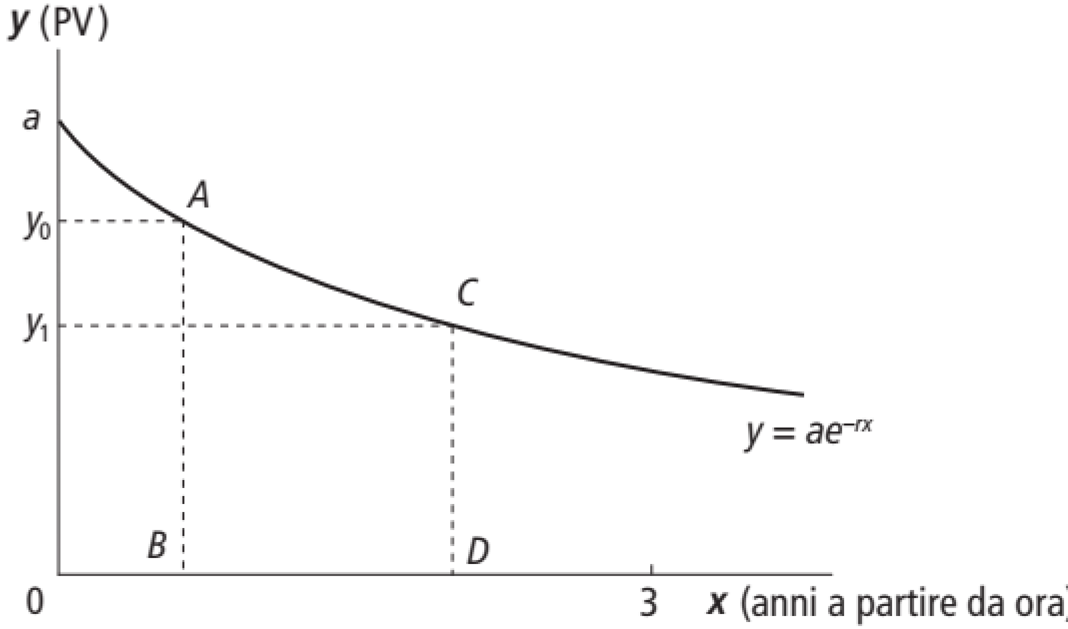
Si tratta della lunghezza di un segmento verticale sotto la curva $y = ae^{-rx}$ (fig. 14.9).

Se invece abbiamo un flusso continuo di pagamenti al tasso *a* annuo sino alla data x_0, il loro *VA* è la somma di tutti i segmenti verticali, ossia l'area sottesa dalla curva.

Pertanto: $VA = \int_0^{x_0} [ae^{-rx}]\,\mathrm{d}x$ (Regola 14.6)

Che si semplifica in $VA = \frac{a}{r}(1 - e^{-rx})$ (Regola 14.6a)

Figura 14.9 Valore attuale di un flusso continuo di entrate



La lunghezza del segmento verticale *AB* (= y_0) rappresenta il valore attuale di un singolo pagamento di *a* euro da ricevere a un tempo x_0 da oggi in regime di attualizzazione continua. La somma delle lunghezze di tutti i segmenti verticali simili (= area sottesa dalla curva) fra 0 e 3, misurata da $\int_0^3 [ae^{-rx}]dx$), rappresenta il valore attuale di un flusso continuo di entrate di *a* euro all'anno per 3 anni.