

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2010/2011 – Appello del 9/02/2011

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Nel piano verticale Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy con velocità angolare ω , un punto materiale Q di massa m è vincolato a muoversi con attrito lungo l’asse orizzontale Ox, mentre un altro punto P di massa $2m$ è vincolato a muoversi lungo la retta di equazione $y = x$. I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica $h > 0$. Inoltre, sul punto Q agiscono: una forza elastica di costante $k > 0$ e centro O, ed una forza $\mathbf{G} = h (PO \cdot \mathbf{i}) \mathbf{j}$, con \mathbf{i} e \mathbf{j} versori degli assi Ox ed Oy, rispettivamente. Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari all’istante iniziale, quando entrambi i punti si trovano nell’origine, Q in quiete e P con velocità $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{p}$, essendo \mathbf{p} il versore della retta $y = x$ ed $u_0 > 0$. **(4 punti)**

Inoltre, posto $k = h = m\omega^2$ e $f_s = 1/2$,

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Un disco omogeneo è vincolato, nel piano Oyz, a ruotare intorno all’asse fisso Ox passante per il suo centro, mentre il sistema Oxyz trasla uniformemente lungo la direzione Oy. Il sistema di forze apparenti agenti su di esso è riducibile a:

- i) zero
- ii) un vettore applicato
- iii) una coppia
- iv) un vettore e una coppia

2. Dato un corpo materiale a struttura giroscopica sferica, dire quanti integrali sono necessari per il calcolo della massa e della matrice centrale d’inerzia:

- i) zero
- ii) uno
- iii) due
- iv) tre

3. Due aste sono incernierate tramite un loro estremo ad un supporto fisso condiviso: dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) quattro
- ii) sei
- iii) otto
- iv) dieci

4. Un’asta omogenea AB è vincolata nel piano Oxy a muoversi con l’estremo A sull’asse Ox. Dire qual è la formula ottimale per il calcolo del momento angolare:

- i) $\mathbf{K}_A = \sigma_A \boldsymbol{\omega}$
- ii) $\mathbf{K}_G = \sigma_G \boldsymbol{\omega}$
- iii) il 2° teorema di Koenig;
- iv) $\mathbf{K}_A = \mathbf{AG} \times \mathbf{Q} + I_{Gz} \boldsymbol{\omega}$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani, uno per ogni punto materiale: la coordinata s del punto P sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e la coordinata x_Q del punto Q vincolato sull’asse Ox .

La I equazione pura è la 2^a legge di Newton per il punto P proiettata lungo la bisettrice:

$$2m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg(2)^{1/2} - hs + hx_Q(2)^{1/2}/2 + m\omega^2s,$$

La II equazione pura è la 2^a legge di Newton per il punto Q proiettata lungo l’asse Ox :

$$m \frac{d^2x_Q}{dt^2} = (m\omega^2 - h - k) x_Q + hs(2)^{1/2}/2 + A$$

$$\text{con } A = -mf_d [g^2 + 4\omega^2 (dx_Q/dt)^2]^{1/2} (\text{segno di } (dx_Q/dt))$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale $t=0$ sono:
 $s = x_Q = 0, ds/dt = u_0 > 0, dx_Q/dt = 0,$

$$\phi_{P2}(0) = (2)^{1/2}mg, \quad \phi_{P3}(0) = -2(2)^{1/2}m\omega u_0,$$

$$\phi_{Q2}(0) = mg, \quad \phi_{Q3}(0) = 0, \quad A = 0.$$

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale si ricavano dall’equazione per la statica di P: $x_Q = 2mg/h,$

inserita nella legge di Coulomb-Morin per la statica, da cui si ottiene
 $3mg/[h(2)^{1/2}] \leq s \leq 5mg/[h(2)^{1/2}]$

iv) Scelta la posizione di equilibrio $x_Q = 2mg/h$ e $s = 3mg/[h(2)^{1/2}]$

$$\phi_{P2} = mg(2)^{1/2}, \quad \phi_{P3} = 0, \quad \phi_{Q2}(0) = mg, \quad \phi_{Q3} = 0, \quad A = mg/2.$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2010/2011 – Appello del 23/02/2011

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Nel piano verticale Oxy, un’asta omogenea AB di lunghezza $2L$ è vincolata con l’estremo A all’asse verticale scorrevole liscio Oy. Una molla, di costante elastica $h > 0$, collega l’estremo B ad un punto Q posto sul semiasse Oy positivo a distanza $4L$ da O. Inoltre, sul sistema, agiscono:

- a) una forza costante $\mathbf{F} = 3/4(h \text{ QO})$ applicata nel baricentro G dell’asta;
- b) una coppia di forze di momento $\mathbf{M} = h (\text{OQ} \times \text{AG})$.

Supponendo il piano Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy con velocità angolare costante ω , determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto; **(9 punti)**;
- ii) le reazioni vincolari all’istante iniziale, quando l’asta è disposta lungo il semiasse verticale positivo, con l’estremo A in quiete nell’origine e l’estremo B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0 \mathbf{i}$, $u_0 > 0$ (\mathbf{i} versore dell’asse Ox). **(3 punti)**

Inoltre, posto $hL = mg = m\omega^2 L$, calcolare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio stabile. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un cono omogeneo, dire quanti assi centrali sono principali rispetto ad un punto della circonferenza di base:

- i) zero ii) uno iii) due iv) tre

2. Data un’asta rigida AB omogenea, i cui estremi sono vincolati a scorrere, rispettivamente, A sull’asse Oy, e B sull’asse Ox di un sistema Oxy, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) uno ii) due iii) tre iv) quattro

3. Dato un disco vincolato a rotolare senza strisciare nel piano Oxy lungo la guida rettilinea Ox, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del primo membro della 2° Equazione Cardinale della Dinamica (H punto di contatto tra disco e guida, G baricentro del disco, \mathbf{k} versore asse Oz):

- i) $(d/dt)\mathbf{K}_H + \mathbf{v}_H \times \mathbf{Q}$ ii) $(d/dt) [(d\theta/dt) \sigma_G \mathbf{k}]$ iii) $(d/dt)[HG \times \mathbf{Q} + I_{Gz} (d\theta/dt) \mathbf{k}]$ iv) $I_{Hz} (d^2\theta/dt^2) \mathbf{k}$

4. Nello studio della stabilità di un sistema materiale, se il potenziale ha un punto di minimo allora:

- i) la posizione è di equilibrio stabile ii) la posizione è di equilibrio instabile
- iii) il determinante Hessiano è positivo iv) il determinante Hessiano è negativo.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONE

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani, che sono l’angolo diedro θ che il piano contenente l’asta forma con il piano Oxz , misurato in verso antiorario, e la coordinata y_A del vertice A dell’asta che trasla lungo l’asse Oy .

Una è la prima ECD proiettata lungo l’asse Oy :

$$m \frac{d^2 y_A}{dt^2} + mL \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right] = -mg - h(y_A - 4L) - 2hL \sin \theta - 3hL$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Az per l’asta:

$$\frac{4}{3} mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mL \frac{d^2 y_A}{dt^2} \cos \theta = -(7hL^2 + mgL) \cos \theta - 2hL \cos \theta (y_A - 4L) - \frac{4}{3} m \omega^2 L^2 \sin \theta \cos \theta.$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

$$\phi_{A1}(0) = 0, \quad \phi_{A3}(0) = -\frac{1}{3} m \omega u_0, \quad \phi_{B3}(0) = -\frac{2}{3} m \omega u_0$$

Se il vincolo in B è sostituito da una coppia di momento $\Psi = \Psi \eta$, con η versore perpendicolare all’asta nel suo sistema di riferimento solidale, allora

$$\Psi = \frac{4}{3} m \omega L u_0, \quad \phi_{A3}(0) = -m \omega u_0, \quad \phi_{A1}(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per θ sono:

$$\theta_1 = \pi/2, y_{A1} = -2L \quad \theta_2 = 3\pi/2, y_{A2} = -2L \quad \theta_3 = 0, y_{A3} = 0 \quad \theta_4 = \pi, y_{A4} = 0$$

iv) Scelgo la posizione $y_{A1} = -2L$ e $\theta = \theta_1 = \pi/2$:

$$\phi_{A1}(0) = \phi_{A3}(0) = \phi_{B3}(0) = 0$$

$$[\Psi = \phi_{A1}(0) = \phi_{A3}(0) = 0]$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2010/2011 – Appello del 29/06/2011

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un punto materiale P, di massa m, vincolato all’asse orizzontale liscio Ox e da un disco omogeneo, di massa m e raggio R, vincolato a rotolare senza strisciare lungo lo stesso asse. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con il baricentro C del disco, mentre un’altra molla di costante elastica $h > 0$ collega il baricentro del disco all’origine degli assi. Sul disco agisce un momento $\mathbf{M} = h (\mathbf{OH} \times \mathbf{CT})$, con H punto di contatto tra disco e guida, e T punto generico appartenente al bordo del disco. Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando il punto si trova in quiete a distanza $2R$ da O, mentre il disco è con il baricentro C sull’asse verticale Oy avente velocità $\mathbf{v}_C = u_0 \mathbf{i}$, con $u_0 > 0$ e \mathbf{i} versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un sistema di vettori applicati riducibile ad una coppia, qual è l’affermazione sicuramente errata: i) i vettori applicati sono piani; ii) i vettori applicati sono paralleli; iii) il momento risultante è nullo; iv) il risultante è non nullo.

2. Data una lamina quadrata vincolata ad un asse scorrevole, dire quanti gradi di libertà possiede:
i) due ii) tre iii) quattro iv) cinque

3. Data un’emisfera omogenea, dire quanti assi centrali sono principali rispetto ad un punto posto sul bordo della circonferenza di base:
i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

4. Una lamina rettangolare di lato minore L si muove all’interno di una guida cilindrica liscia di asse Oz, raggio $L/2$ e lunghezza assunta infinita. Dire quali sono le equazioni pure del moto (ECD = equazioni cardinali della dinamica, G = baricentro):
i) il teorema del momento angolare assiale di asse Gz e la 1^a ECD proiettata lungo l’asse Gz;
ii) la 2^a ECD con polo in O proiettata lungo le tangenti alla superficie cilindrica;
iii) il teorema del momento angolare assiale di asse Oz e la 1^a ECD proiettata lungo l’asse Oz;
iv) la 1^a ECD proiettata lungo le tangenti alla superficie cilindrica.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:
CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono l’angolo diedro θ che il piano CTz forma rispetto al piano CHz per il disco, e la posizione x_P sull’asse Ox per il punto P. Le equazioni pure sono il teorema del momento angolare assiale di asse Hz per il disco

$$3/2mR^2 d^2\theta/dt^2 = kR(x_P - R\theta) - hR^2\theta + hR^2\theta\cos\theta$$

e la seconda legge di Newton per il punto proiettata sull’asse Ox

$$md^2x_P/dt^2 = k(R\theta - x_P)$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{H1}(0) = -2/3kR, \quad \phi_{H2}(0) = mg + R(k+h), \quad \phi_{H3}(0) = \phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0$$

$$\phi_{P2}(0) = mg - kR, \quad \phi_{P3}(0) = 0$$

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce una sola posizione di equilibrio per θ :

$$\theta_1 = 0 \quad \text{indifferente}$$

iv) e dunque, nella posizione $\theta = 0$, si ha:

$$\phi_{H1}(0) = \phi_{H2}(0) = \phi_{H3}(0) = \phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0$$

$$\phi_{P2}(0) = mg, \quad \phi_{P3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2010/2011 – Appello del 13/07/2011

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un sistema relativo Oxyz ruotante uniformemente intorno all’asse verticale Oy con velocità angolare ω , un sistema materiale è costituito da un’asta omogenea AB di massa m e lunghezza L, e da un punto materiale P di massa 2m libero di scorrere con attrito lungo la retta di equazione $x = L$ e $y = 0$. L’estremo A dell’asta è incernierato nell’origine O a ruotare attorno all’asse z, mentre una molla di costante elastica $h > 0$ collega l’estremo B dell’asta al punto P. Sull’asta, inoltre, agisce un momento $\mathbf{M} = \frac{1}{2} (mg \times \mathbf{OB}')$, essendo \mathbf{g} l’accelerazione di gravità e B' la proiezione di B sull’asse Ox.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse Oy, con B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0 \mathbf{i}$, $u_0 > 0$ e \mathbf{i} versore dell’asse Ox, mentre P è nell’origine con velocità $\mathbf{v}_P = w_0 \mathbf{k}$, $w_0 < 0$ e \mathbf{k} versore dell’asse Oz. **(5 punti)**
Posto, quindi, $3hL = mL\omega^2 = 2mg$, calcolare
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio qualsiasi. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un sistema di vettori applicati incidenti, esso è riducibile a:

- i) una coppia; ii) un vettore applicato; iii) zero; iv) un vettore ed una coppia.

2. Dato un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso passante per un suo punto P, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del momento angolare ($G =$ baricentro, $\omega =$ velocità angolare, $\sigma =$ matrice d’inerzia):

- i) $\sigma_G \omega$; ii) il 2° teorema di Koenig; iii) $PG \times M_{VG}$; iv) $\sigma_P \omega$.

3. Data una semisfera omogenea di centro C e raggio R, dire quanti integrali bisogna calcolare per determinare la matrice centrale di inerzia:

- i) due; ii) tre; iii) quattro; iv) cinque.

4. Dato un cono omogeneo vincolato con il proprio vertice C ad un punto fisso, dire quali sono le equazioni pure dell’equilibrio (ECS = equazioni cardinali della statica, G = baricentro):

- i) la 2ª ECS con polo in C proiettata sull’asse di simmetria del cono; ii) la 1ª ECS;
iii) la 2ª ECS con polo in G; iv) la 2ª ECS con polo in C.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono l’angolo diedro θ che il piano ABz forma rispetto al piano Oxz per l’asta, e la posizione s_P sulla retta di equazione $x=L$ e $y=0$ per il punto P. Le equazioni pure sono il teorema del momento angolare assiale di asse Oz per l’asta

$$(1/3)mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -hL^2 \sin\theta - (1/3)mL^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

e la seconda legge di Newton per il punto proiettata sulla retta

$$2m \frac{d^2 s_P}{dt^2} = 2m\omega^2 s_P - h s_P + A,$$

con A dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica

$$A = -f_d \sqrt{(\phi_{P1})^2 + (\phi_{P2})^2} \quad (\text{segn } v_P)$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\begin{aligned} \phi_{O1}(0) &= (3/2)hL, & \phi_{O2}(0) &= mg + hL - m\omega_0^2/2L, & \phi_{O3}(0) &= - (1/3)m\omega_0 u_0, & \phi_{B3}(0) &= - (2/3)m\omega_0 u_0 \\ \phi_{P1}(0) &= 4m\omega_0 w_0 + hL - 2m\omega_0^2 L, & \phi_{P2}(0) &= 2mg - hL, & A(0) &= f_d \sqrt{(\phi_{P1}(0))^2 + (\phi_{P2}(0))^2} \end{aligned}$$

iii) Ci sono due posizioni di equilibrio per θ :

$$\theta_1 = 0 \quad \text{cui corrisponde} \quad (-3/\sqrt{5}) f_s L \leq s_P \leq (3/\sqrt{5}) f_s L$$

$$\theta_2 = \pi \quad \text{cui corrisponde} \quad f_s L \leq s_P \leq f_s L$$

iv) e dunque, nella posizione $\theta = 0$, $s_P = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \phi_{O1} &= -(3/2)hL, & \phi_{O2}(0) &= (3/2)hL, & \phi_{O3}(0) &= 0, & \phi_{B3}(0) &= 0 \\ \phi_{P1} &= 6hL, & \phi_{P2} &= 3hL, & |A| &\leq 3f_s hL \sqrt{5} \end{aligned}$$

SOLUZIONI

i) Vi sono quattro equazioni pure relative ai quattro parametri lagrangiani: le coordinate x_P , y_P e z_P del punto P e la coordinata x_Q del punto Q vincolato sull’asse Ox , nell’ordine:

$$m d^2 x_P / dt^2 = - h x_P - k(x_P - x_Q) + m \omega^2 x_P - 2m \omega dz_P / dt$$

$$m d^2 y_P / dt^2 = - mg - h(y_P - R) - k y_P$$

$$m d^2 z_P / dt^2 = - h z_P - k z_P + m \omega^2 z_P + 2m \omega dx_P / dt$$

$$2m d^2 x_Q / dt^2 = k[(x_P - x_Q) + 2m \omega^2 x_Q + A$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:
 $\phi_{Q2}(0) = 2mg$, $\phi_{Q3}(0) = - 4m\omega u_0$, $A(0) = f_d \sqrt{[(2mg)^2 + (4m\omega u_0)^2]}$

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale sono una per il punto P

$$OP = [(hx_Q / (2h - m\omega^2)), -R, 0]$$

mentre quelle per il punto Q sono date dalla legge di Coulomb-Morin per la statica

$$-7hRCf_s \leq x_Q \leq 7hRCf_s \quad \text{con } C = (m\omega^2 - 2h) / (5m\omega^2 h - 2m^2 \omega^4 - h^2)$$

iv) Scelta la posizione di equilibrio $OP = (0, -R, 0)$, $x_Q = 0$

$$\phi_{Q2} = 7hR, \quad \phi_{Q3} = 0, \quad |A| \leq 7hRf_s$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2010/2011 – Appello del 21/09/2011

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Una lamina quadrata omogenea ABCD, di massa m e lato L , è vincolata con il lato AD all’asse scorrevole liscio verticale Oy. Una molla di costante elastica $h > 0$ collega il vertice D della lamina ad un punto H posto sull’asse Oy a distanza $2L$ da O. Sul sistema materiale agiscono:

I) una forza costante F applicata nel vertice C della lamina e direzione parallela all’asse Oz.

II) un momento $M = DC \times F$.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la lamina è disposta nel piano Oxy, con il vertice A in quiete nell’origine, e il vertice B avente velocità $v_B = u_0 \mathbf{k}$, $u_0 > 0$ (\mathbf{k} versore dell’asse Oz); **(5 punti)**

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, discutendone la stabilità; **(7 punti)**

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile qualsiasi. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un sistema di vettori applicati con invariante scalare non nullo, esso è riducibile a:

i) una coppia; ii) un vettore applicato; iii) zero; iv) un vettore ed una coppia.

2. Un’asta è vincolata con un estremo ad un punto fisso, mentre con l’altro estremo è saldata ad un disco omogeneo. Dire quante sono le componenti delle reazioni vincolari interne ed esterne:

i) 4; ii) 5; iii) 6; iv) 7.

3. Data una lamina omogenea a forma di semidisco, dire quanti assi centrali sono noti a priori:

i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

4. Dato un disco omogeneo di centro C, massa M e raggio R vincolato con il proprio baricentro G a muoversi lungo un asse verticale r mantenendo il proprio piano di appartenenza perpendicolare a tale asse, dire qual è la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica (ω sua velocità angolare):

i) $2^{-1} Mv_G^2 + 2^{-1} I_{Gr} \omega^2$ ii) il 3° teorema di Koenig; iii) $2^{-1} Mv_G^2$;

iv) $2^{-1} \omega \cdot (\sigma_G \omega)$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono dati dall’ordinata y_A del vertice A della lamina e dall’angolo θ che la lamina forma con il piano Oyz, considerato in verso antiorario. Un’equazione pura è data dalla 1° equazione cardinale della dinamica proiettata sull’asse Oy

$$m \, dy_A^2 / dt^2 = -h(y_A - L) - mg$$

mentre l’altra equazione pura è data dalla II equazione cardinale della dinamica proiettata lungo l’asse Ay:

$$1/3 \, mL^2 \, d^2\theta / dt^2 = -2FL \, \text{sen}\theta$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{A1}(0) = hL/2 - \mu_0^2/4L, \quad \phi_{A3}(0) = 3F/2 \quad \phi_{D1}(0) = -hL/2 - \mu_0^2/4L, \quad \phi_{D3}(0) = F/2$$

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce una posizione di equilibrio per y_A , e due posizioni di equilibrio per θ :

$$y_A = L - mg/h, \quad \theta_1 = 0, \quad \rightarrow H > 0 \text{ stabile}$$

$$y_A = L - mg/h, \quad \theta_2 = \pi, \quad \rightarrow H < 0 \text{ instabile}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione $y_A = L - mg/h, \theta = 0$, si ha:

$$\phi_{A1} = 0, \quad \phi_{A3} = mg/2 \quad \phi_{D1} = 0, \quad \phi_{D3} = -mg/2 - F.$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2010/2011 – Appello del 16/11/2011

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta AB di lunghezza L, la cui densità di massa nel generico punto P è data da $\mu(P) = 2m/L^2|AP|$. L’asta è vincolata a muoversi con il punto medio fissato nell’origine O. Una forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{k}$, con \mathbf{k} versore dell’asse Oz, è applicata nel baricentro del sistema. Sul sistema, inoltre, agiscono:

I) una molla di costante elastica $h > 0$ collegante l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sul semiasse positivo Oy a distanza L da O;

II) una molla di costante elastica $k > 0$ collegante l’estremo A dell’asta ad un punto T posto sul semiasse negativo Ox a distanza L da O.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’estremo B dell’asta si trova sul semiasse positivo Ox con velocità $\mathbf{v}_B = u_0\mathbf{j}$, essendo $u_0 > 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy; **(4 punti)**

Posto, quindi, $mg = 6kL$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale studiandone la stabilità; **(7 punti)**

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Data un corpo materiale qualsiasi in moto in un sistema relativo Oxyz che trasla con accelerazione costante in direzione dell’asse Ox, dire se il sistema di forze apparenti è riducibile a:

i) zero ii) un vettore applicato iii) una coppia iv) un vettore e una coppia

2. Data una lamina quadrata vincolata con un suo lato ad un’asse scorrevole, dire quanti sono le componenti delle reazioni vincolari:

i) una ii) due iii) quattro iv) sei

3. Dato un corpo rigido con asse fisso, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite, di risultante \mathbf{R} e momento risultante \mathbf{M}_O rispetto all’origine solidale O’:

i) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$ ii) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_O \cdot d\boldsymbol{\theta}$ iii) $dL = \mathbf{M}_O \cdot d\boldsymbol{\theta}$ iv) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un disco vincolato a rotolare lungo l’asse Ox, mantenendosi nel piano Oxy, la, o le, equazioni pure del moto sono date da (ECD= equazione cardinale della dinamica):

i) le due ECD; ii) il teorema del momento angolare assiale iii) la 1^a ECD proiettata sul’asse Ox
iv) la 1^a ECD proiettata sul’asse Ox e il teorema del momento angolare assiale

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione *on-line* in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede un grado di libertà, ed il parametro lagrangiano è dato dall’angolo θ che l’asta forma con l’asse Ox , considerato in verso antiorario. L’equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse Oz :

$$(1/12)mL^2(d^2\theta/dt^2) = \cos\theta(hL^2/2 + kL^2/2 - mgL/6)$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{O1}(0) = (L/2)(h-k) - (2/3)\mu_0^2/L; \phi_{O2}(0) = 2kL - (2/3)mg; \phi_{O3}(0) = -(4/3)F; \phi_{B3}(0) = -F/3$$

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce due posizioni di equilibrio per θ , con $h > k$:

$$\theta_1 = \pi/2, \quad \rightarrow H < 0 \text{ stabile} \qquad \theta_2 = 3\pi/2, \quad \rightarrow H > 0 \text{ instabile}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione $\theta = \theta_1 = \pi/2$, si ha:

$$\phi_{O1} = 0; \phi_{O2} = (13/2)kL - hL/2; \phi_{O3} = -(4/3)F; \phi_{B3} = -F/3$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2011/2012 – Appello del 08/02/2012

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Una lamina rettangolare ABCD di lati $|AB| = 2L$ e $|AD| = L$, avente densità di massa nel generico punto P data da $\mu(P) = mL^{-3} |P'P|$, con m costante positiva e P’ proiezione di P sul lato AB, è vincolata in E ed F, rispettivamente punti medi del lato inferiore AB e superiore DC, all’asse scorrevole verticale Oz. Una molla di costante elastica $h > 0$ collega il punto F della lamina ad un punto fisso H posto sull’asse Oy a distanza L da O. Sul sistema materiale agiscono:

- I) una forza costante **F** applicata nel vertice C della lamina e direzione parallela all’asse Ox;
- II) una forza costante **G** applicata in E e direzione perpendicolare alla lamina;
- III) un momento **M** = h (AB x OB’) dove B’, è la proiezione di B sull’asse Oy.

Supponendo il vincolo in E scabro, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la lamina è disposta nel piano Oyz, con il punto E nell’origine avente velocità $v_E = u_0 \mathbf{k}$, $u_0 < 0$, ed il punto B avente velocità $v_B = v_0 \mathbf{i}$, $v_0 > 0$, **i** e **k** versori dell’asse Ox e Oz, rispettivamente. **(5 punti)**

Supponendo ora che le costanti siano legate dalle seguenti relazioni: $mg = hL = |\mathbf{F}| = |\mathbf{G}|$, calcolare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio da voi scelta. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Una lamina triangolare equilatera è vincolata all’asse Ox di un sistema Oxyz, passante per una sua bisettrice, ed intorno al quale il sistema ruota uniformemente. Dire se il sistema di forze assifughe è riducibile a:

- i) zero; ii) un vettore applicato; iii) una coppia; iv) un vettore e una coppia.

2. Data una lamina quadrata la cui densità di massa è proporzionale alla distanza del generico punto P da un suo lato, dire quanti assi centrali sono principali rispetto ad un punto posto in un suo vertice:

- i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

3. Un sistema materiale che si trova in un punto di equilibrio stabile con il determinante Hessiano > 0 possiede (U = potenziale; E_p = energia potenziale; GDL= gradi di libertà):

- i) U minimo; ii) E_p massima; iii) numero pari di GDL; iv) numero dispari di GDL.

4. Dato un disco che rotola all’interno di una guida parabolica nel piano π , dire quali sono le equazioni pure dell’equilibrio (H = punto di contatto disco-guida; ECS = equazione cardinale della statica):

- i) la 1^a ECS proiettata normalmente alla parabola; ii) la 2^a ECS;
- iii) la 1^a ECS proiettata lungo la tangente alla parabola e il teorema del momento angolare assiale di asse Hz;
- iv) il teorema del momento angolare assiale di asse Gz.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono l’angolo diedro θ che il piano EBz forma rispetto al piano Exz per la lamina, e la posizione z_E sull’asse Oz del punto E. Le equazioni pure sono il teorema del momento angolare assiale di asse Ez

$$1/3mL^2 d^2\theta/dt^2 = \text{sen}\theta(2hL^2\theta - FL)$$

e la prima equazione cardinale della dinamica proiettata sull’asse Oz

$$md^2z_E/dt^2 = -mg - h(z_E + L) + A, \text{ con } A = -f_d|G|\text{segn}(v_E)$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{E1}(0) = G, \quad \phi_{E2}(0) = 0, \quad A(0) = f_d G$$

$$\phi_{F1}(0) = -F, \quad \phi_{F2}(0) = -hL$$

iii) Ci sono tre posizioni di equilibrio per θ :

$$\theta_{1,2} = 0, \pi \text{ e } \theta_{3,4} = \pi/3, 5\pi/3$$

mentre dalla legge di Coulomb-Morin per la statica, posto $f_s=1/2$ otteniamo

$$-2L - L/2 \leq z_E \leq L/2 - 2L \quad \text{e} \quad -5L/2 \leq z_E \leq -3L/2$$

iv) nella posizione $\theta = 0, z_E = -3L/2$ si ha:

$$\phi_{E1} = 0, \quad \phi_{E2} = hL, \quad A = hL/2$$

$$\phi_{F1} = -hL, \quad \phi_{F2} = -hL$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2011/2012 – Appello del 22/02/2012

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un’asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2L$, e da un punto materiale Q, di massa $2m$, vincolato a scorrere lungo l’asse Oy. L’asta è vincolata nel suo punto fisso C, posto a distanza $L/2$ da A, all’origine O degli assi.

Sul sistema agiscono:

- a) una forza elastica di costante $k > 0$ collegante Q al baricentro G dell’asta;
- b) un’altra forza elastica di costante $h > 0$ collegante l’estremo B dell’asta al punto T ($3L/2, 0, L$);
- c) un momento $\mathbf{M} = CB' \times (-mg)$, con B’ proiezione di B sull’asse Ox e \mathbf{g} accelerazione di gravità.

Supponendo i vincoli lisci, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta parallelamente all’asse Oy con il baricentro avente velocità $\mathbf{v}_G = u_0 \mathbf{i}$, $u_0 > 0$, mentre il punto Q è in quiete a distanza $L/2$ da O; **(4 punti)**

Ponendo ora le costanti legate dalle seguenti relazioni: $2mg = kL$ ed $h = k/18$, determinare, altresì:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(8 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile da voi scelta. **(5 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno

1. Dati due vettori applicati di pari modulo ma verso discorde, dire se sono riducibili a:

- i) una coppia; ii) un vettore applicato; iii) zero; iv) un vettore ed una coppia.

2. Un disco ruota attorno ad un’asse fisso passante per il centro e perpendicolare al piano del disco stesso, mentre un’asta è incernierata al disco con un estremo e l’altro estremo si muoversi nello stesso piano di appartenenza del disco. Dire quante sono le componenti delle reazioni vincolari interne ed esterne:

- i) 8; ii) 9; iii) 10; iv) 11.

3. Data una lamina omogenea piana a forma di cornice rettangolare, dire quanti assi centrali sono noti a priori:

- i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

4. Dato un’asta omogenea di massa M vincolata con il proprio baricentro G ad un asse fisso r , dire qual’è la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica (ω velocità angolare dell’asta):

- i) $\frac{1}{2} Mv_G^2 + \frac{1}{2} I_{Gr} \omega^2$ ii) il 3° teorema di Koenig; iii) $\frac{1}{2} Mv_G^2$; iv) $\frac{1}{2} \omega \cdot (\sigma_G \omega)$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono l’angolo diedro θ che il piano CBz forma rispetto al piano Cxz per l’asta, e la posizione y_Q sull’asse Oy del punto Q. Le equazioni pure sono il teorema del momento angolare assiale di asse Cz per l’asta:

$$7/12(mL^2) d^2\theta/dt^2 = mgL\cos\theta + kLy_Q\cos\theta/2 - 9hL^2\sin\theta/4$$

e la seconda legge di Newton proiettata sull’asse Oy per il punto Q

$$2md^2y_Q/dt^2 = -2mg + k(L/2 \sin\theta - y_Q)$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\begin{aligned} \phi_{Q1}(0) = 0, \quad \phi_{Q3}(0) = 0, \quad \psi_{\eta}(0) = 3hL^2/2 \\ \phi_{C1}(0) = 3hL/7, \quad \phi_{C2}(0) = 2\mu_0^2/L + mg + 3hL/2, \quad \phi_{C3}(0) = -hL, \end{aligned}$$

iii) Il sistema è conservativo ed il teorema di Dirichlet ci fornisce

$$\theta_{1,2} = 0, \pi \text{ e } \theta_{3,4} = \pi/3, -\pi/3$$

a cui corrispondono

$$y_1 = -L, y_2 = -L, y_3 = L(\sqrt{3}/4 - 1), y_4 = -L(\sqrt{3}/4 + 1)$$

$\partial H/\partial y = -k < 0$ per tutte le posizioni di equilibrio, ma con

$$H(1) < 0, H(2) < 0 \Rightarrow \text{INSTABILI}, \quad H(3) > 0, H(4) > 0 \Rightarrow \text{STABILI}$$

iv) nella posizione $q_3 = (y_3, \theta_3)$

$$\begin{aligned} \phi_{Q1} = -kL/4, \quad \phi_{Q3} = 0, \quad \psi_{\eta} = kL^2/12 \\ \phi_{C1}(0) = 5kL/24, \quad \phi_{C2}(0) = (36 + \sqrt{3})kL/24, \quad \phi_{C3}(0) = -kL/18 \end{aligned}$$