

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 07/07/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

**Quesiti a risposta aperta**

In un piano verticale  $Oxy$ , un sistema materiale è costituito da un punto materiale  $P$ , di massa  $2m$ , vincolato a muoversi con attrito sull’asse verticale  $Oy$  e da un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ , vincolato a rotolare senza strisciare lungo l’asse orizzontale  $Ox$ .

Una molla di costante elastica  $k > 0$  collega il punto  $P$  con il baricentro  $C$  del disco, mentre un’altra molla di costante elastica  $h > 0$  collega il punto  $P$  ad un punto fisso situato sul semiasse verticale positivo  $Oy$  a distanza  $3R$  da  $O$ . Sul disco agisce un momento  $\mathbf{M} = k(\mathbf{OH} \times \mathbf{CT})$ , con  $H$  punto di contatto tra disco e guida, e  $T$  punto prefissato appartenente al bordo del disco.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando il punto si trova sul semiasse verticale positivo a distanza  $R$  da  $O$  con velocità  $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{j}$ , con  $u_0 < 0$  e  $\mathbf{j}$  il versore dell’asse  $Oy$ , mentre il disco è posto sul semiasse orizzontale positivo  $Ox$  con il baricentro  $C$  a distanza  $\pi R/2$  dall’asse verticale  $Oy$  avente velocità  $\mathbf{v}_C = w_0 \mathbf{i}$ , con  $w_0 > 0$  e  $\mathbf{i}$  il versore dell’asse  $Ox$ ; **(4 punti)**

Posto, quindi,  $mg = hR = kR$ , determinare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(4 punti)**

**Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno**

1. Data una sbarra omogenea di lunghezza  $L$  vincolata nel piano  $Oxy$  a scorrere con un estremo sull’asse  $Ox$ , dire quanti assi centrali d’inerzia sono assi principali rispetto all’origine  $O$  degli assi:

- i) zero;                      ii) **uno**;                      iii) due;                      iv) tre.

2. Data una biglia vincolata a rotolare senza strisciare nel piano verticale all’interno di una guida circolare, dire quanti gradi di libertà possiede:

- i) due                      ii) tre                      iii) **quattro**                      iv) cinque

3. Data un’asta omogenea vincolata con il baricentro  $G$  a traslare senza ruotare lungo la bisettrice del 1° e 3° quadrante del piano  $Oxy$ , individuare la, o le, equazioni pure del moto:

- i) la 1<sup>a</sup> ECD proiettata nel piano; ii) **la 1<sup>a</sup> ECD proiettata lungo la bisettrice**; iii) la 2<sup>a</sup> ECD con polo in  $G$  proiettata lungo la normale al piano; iv) la 2<sup>a</sup> legge di Newton proiettata nel piano.

4. Indicare la formula ottimale per il calcolo del momento angolare di una lamina quadrata vincolata a muoversi con un suo vertice fisso  $A$ :

- i) il 2° teorema di Koenig;    ii)  $AG \times m\mathbf{v}_G$ ;    iii)  **$\sigma_A \omega$** ;    iv)  $AG \times M\mathbf{v}_G + \sigma_G \omega$ .

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

### SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà: l’ordinata del punto  $y_P$  e l’angolo  $\theta$ , preso in verso orario che, per scelta, il raggio OT del disco forma con il raggio OH, con H punto di contatto tra disco e asse Ox, supponendo che  $R\theta(t=t_0)=0$ .

Un’equazione pura si ottiene dalla 2<sup>a</sup> legge di Newton per il punto P proiettata sull’asse Oy:

$$2m \frac{d^2 y_P}{dt^2} = -2mg - h(y_P - 3R) + k(R - y_P) + A, \text{ con } A = -f_d |kR\theta| \text{ (segn } v_P)$$

L’altra equazione pura si ottiene dalla 2<sup>a</sup> ECD per il disco proiettata sull’asse Hz:

$$-3/2 mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kR^2 \theta (1 - \cos \theta)$$

ii) Le reazioni vincolari all’istante iniziale sono date da:

$$\phi_{P1}(0) = -kR\pi/2, \quad \phi_{P3}(0) = 0, \quad A_P(0) = f_d kR\pi/2$$

$$\phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0, \quad \phi_{H1}(0) = kR\pi/6, \quad \phi_{H2}(0) = mg; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per il disco sono due per  $\theta$ , e la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce le corrispondenti per  $y_P$ :

$$\theta_1 = 0, \quad y_{P1} = R; \quad \text{-----} \quad \theta_2 = 2\pi, \quad -f_s \pi R + R \leq y_{P1} \leq f_s \pi R + R;$$

iv) Scegliendo la prima posizione d’equilibrio  $\theta_1 = 0$  e  $y_{P1} = R$ , si ottengono le seguenti reazioni vincolari all’equilibrio:

$$\phi_{P1}(0) = 0, \quad \phi_{P3}(0) = 0, \quad A_P(0) = 0$$

$$\phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0, \quad \phi_{H1}(0) = 0, \quad \phi_{H2}(0) = mg, \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 22/07/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

**Quesiti a risposta aperta**

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta omogenea AB, di massa m e lunghezza 2L, vincolata a muoversi con il baricentro G sull’asse orizzontale Ox.

Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica  $h > 0$  collegante l’origine degli assi con l’estremo A dell’asta;

II) una molla di costante elastica  $k > 0$  collegante l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sul semiasse orizzontale positivo Ox a distanza 4L da O;

III) un momento  $\mathbf{M} = (23 h)/3 (B'B \times GB')$ , con B' proiezione dell’estremo B sull’asse orizzontale Ox.

Supponendo il piano ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse orizzontale Ox con il baricentro in quiete nell’origine degli assi e l’estremo B sul semiasse positivo con velocità  $v_B = u_0 \mathbf{j}$ , essendo  $u_0 > 0$  e  $\mathbf{j}$  il versore dell’asse Oy; **(4 punti)**

Posto, quindi,  $h = k = m\omega^2$ , determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(7 punti)**

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile. **(4 punti)**

**Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno**

1. Data una lamina vincolata a ruotare intorno ad un suo lato fisso OA in un sistema relativo Oxyz soggetto a traslare uniformemente lungo la direzione Oy, dire se il sistema di forze di trascinamento è riducibile a:

i) **zero**      ii) un vettore applicato      iii) una coppia      iv) un vettore e una coppia

2. Dato un cilindro vincolato col suo asse a scorrere e ruotare lungo un’asse r, dire quante componenti hanno le relative reazioni vincolari:

i) due      ii) tre      iii) **quattro**      iv) cinque

3. Dato un corpo rigido, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite ( $O'$  = origine solidale):

i)  $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$       ii)  $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_{O'} \cdot d\mathbf{\Theta}$       iii)  $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$       iv)  $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un punto P di massa m vincolato a ruotare lungo una circonferenza di centro C nel piano verticale la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è data da:

i) il 3° teorema di Koenig      ii)  $\frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2$       iii)  $\frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{K}_C$       iv)  $\frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

### SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono dati dall’ascissa  $x_G$  del baricentro e dall’angolo  $\theta$  che l’asta forma con l’asse  $Ox$ , considerato in verso antiorario. Un’equazione pura è data dalla 1<sup>a</sup> equazione cardinale della dinamica proiettata sull’asse  $Ox$

$$m \, dx_G^2 / dt^2 = -h(x_G - L \cos \theta) - k(x_G + L \cos \theta - 4L) + m\omega^2 x_G,$$

mentre l’altra equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse  $Gz$ :

$$1/3 \, mL^2 \, d^2\theta/dt^2 = -hLx_G \sin \theta + kL \sin \theta (x_G + 4L) - 1/3 \, m\omega^2 L^2 \sin \theta \cos \theta - 23/3 \, hL^2 \sin \theta \cos \theta .$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\Psi(0) = 0, \phi_{G2}(0) = mg, \phi_{G3}(0) = 0$$

(se il vincolo di rotazione è realizzato con una reazione puntuale in  $B$ ,  $\phi_{B3}(0) = 0$ )

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce una posizione di equilibrio per  $x_G$ , e quattro posizioni di equilibrio per  $\theta$ :

$$\begin{array}{ll} x_G = 4L, \theta_1 = 0, & \rightarrow H > 0 \text{ stabile} \\ x_G = 4L, \theta_3 = 2\pi/3, & \rightarrow H < 0 \text{ instabile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_G = 4L, \theta_2 = \pi, & \rightarrow H > 0 \text{ stabile} \\ x_G = 4L, \theta_4 = 4\pi/3, & \rightarrow H < 0 \text{ instabile} \end{array}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione  $x_G = 4L, \theta_3 = 0$ , si ha:

$$\Psi = 0, \phi_{G2} = mg, \phi_{G3} = 0$$

(se il vincolo di rotazione è realizzato con la reazione puntuale in  $B$ ,  $\phi_{B3}(0) = 0$ ).

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 3/3/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

**Quesiti a risposta aperta**

In un piano verticale Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse verticale Oy, un sistema materiale è costituito da una sbarra omogenea AB di lunghezza 2R, vincolata con il punto medio C ad un punto del semiasse positivo Oy posto a distanza R dall’origine. Una molla di costante elastica  $h > 0$  collega l’estremo B della sbarra ad un punto fisso H posto a distanza R dall’origine sul semiasse positivo Ox. Sulla sbarra, inoltre, agisce un momento  $\mathbf{M} = h(\mathbf{OH} \times \mathbf{CB})$ .

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la sbarra è disposta con l’estremo A nell’origine O e l’estremo B avente velocità  $\mathbf{v}_B = u_0 \mathbf{i}$ , con  $u_0 > 0$  ed  $\mathbf{i}$  il versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile a scelta. **(4 punti)**

**Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno**

1. Dato un sistema materiale formato da due punti vincolati a muoversi lungo un asse r a distanza d fra di loro, il momento di inerzia rispetto all’asse r è dato da:

- i) un numero reale positivo;    ii) un numero reale negativo;    iii) zero;    iv) un numero complesso

2. Data un’asta rigida vincolata con il proprio baricentro G ad una circonferenza di raggio R e centro C, indicare la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica:

- i)  $\frac{1}{2} m v_G^2$ ;    ii)  $\frac{1}{2} \sum_i m v_i^2$ ;    iii)  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega})$ ;    iv) il 3° teorema di Koenig.

3. Data una lamina quadrata omogenea vincolata a traslare con un lato lungo l’asse Ox, dire quanti assi centrali sono principali rispetto all’origine O:

- i) zero ;    ii) uno;    iii) due;    iv) tre.

4. Dato un disco vincolato con un punto fisso del suo bordo a muoversi in un piano, indicare la, o le, equazioni pure del moto (EC = equazione cardinale):

- i) la 1<sup>a</sup> EC;    ii) la 2<sup>a</sup> EC;    iii) le due EC;    iv) la 2<sup>a</sup> EC assiale.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA E CFU:

FIRMA:

### SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede un grado di libertà, ed il parametro lagrangiano è dato dall’angolo  $\theta$  tra il piano  $Cyz$  ed il piano  $C\eta z$ , con  $\eta$  asse solidale all’asta. L’equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse  $Cz$ :

$$(1/3) mR^2 d^2\theta/dt^2 = -hR^2\cos\theta - (1/3) mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{C1}(0) = -hR, \quad \phi_{C2}(0) = mg + 2hR, \quad \phi_{C3}(0) = (2/3) m\omega u_0, \quad \phi_{B3}(0) = -(2/3) m\omega u_0 \text{ (oppure, se il vincolo è realizzato con un momento, } \Psi_B(0) = -(2/3) m\omega u_0 R, \phi_{C3}(0) = 0)$$

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce quattro posizioni di equilibrio per  $\theta$ :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = \pi/2, & \rightarrow H > 0, \text{ instabile} \\ \theta_2 = 3\pi/2, & \rightarrow H > 0, \text{ instabile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \theta_3 = \arcsin[-(3h)/(m\omega^2)], & \rightarrow H < 0, \text{ stabile, con } h < m\omega^2/3 \\ \theta_4 = \pi - \theta_3, & \rightarrow H < 0, \text{ stabile, con } h < m\omega^2/3 \end{array}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione  $\theta = \theta_3 = \arcsin[-(3h)/(m\omega^2)]$ , si ha:

$$\phi_{C1}(\theta_3) = hR \left( \sqrt{1 - \frac{9h^2}{m^2\omega^4}} - 1 \right), \quad \phi_{C2}(\theta_3) = mg + hR \left( 1 - \frac{3h}{m\omega^2} \right), \quad \phi_{C3}(\theta_3) = 0, \quad \phi_{B3}(\theta_3) = 0 \text{ (oppure, se il vincolo è realizzato con un momento, } \Psi_B(\theta_3) = 0, \phi_{C3}(\theta_3) = 0)$$



### SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani, uno per ogni punto materiale: la coordinata  $\theta$  del punto P vincolato alla circonferenza e la coordinata  $y$  del punto Q vincolato all’asse  $Oy$ .

Una è la seconda legge di Newton per il punto P proiettata lungo la tangente alla circonferenza:

$$mRd^2\theta/dt^2 = -mg\cos\theta + kycos\theta - m\omega^2R\sin\theta\cos\theta$$

La seconda equazione pura è la seconda legge di Newton per il punto Q proiettata lungo l’asse  $Oy$ :

$$2md^2y/dt^2 = -2mg + kR\sin\theta - ky + A, \text{ con } A = -f_d|kR\cos\theta| \text{ (segn } v_Q)$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

a  $t=0$ ,  $\theta(0)=\pi/4$ ,  $d\theta(0)/dt = u_0/R$ ,  $v_p(0)=u_0t$ ,  $y(0) = -R$ ,  $v_Q(0) = w_0j$ ,  $u_0 > 0$ ,  $w_0 < 0$

$$\phi_{P2}(0) = m(u_0^2/R + \omega^2R/2 + g(2)^{1/2}/2) - kR(1 + (2)^{1/2}/2), \quad \phi_{P3}(0) = (2)^{1/2}m\omega u_0,$$

$$\phi_{Q1}(0) = -kR(2)^{1/2}/2, \quad \phi_{Q3}(0) = 0, \quad A = f_d kR(2)^{1/2}/2$$

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale sono:

$$\theta_{1,2} = \pi/2, 3\pi/2 \text{ con } y_1 = R - 2mg/k \text{ e } y_2 = -R - 2mg/k$$

e

$$0 \leq \theta \leq \pi/3$$

$$5\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$$

$$\text{con } y = (mg + kR\sin\theta)/k$$

iv) Scegliendo la posizione  $\theta = \pi/2$ ,  $y = R - 2mg/k$

$$\phi_{P2} = 3mg, \quad \phi_{P3} = 0,$$

$$\phi_{Q1}(0) = 0, \quad \phi_{Q3} = 0, \quad A = 0.$$

#### Soluzioni quesiti a risposta chiusa

**1. ii) – 2. iv) – 3. ii) – 4. iii)**

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 16/07/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

**Quesiti a risposta aperta**

Un sistema materiale è costituito da una lamina rettangolare omogenea ABCD, con  $|AD| = 2L$  e  $|AB| = L$ . Lungo la mediana EF, essendo E il punto medio del lato AD ed F il corrispondente sul lato BC, passa l’asse scorrevole orizzontale Oy. Sul sistema materiale agiscono:

- a) un momento  $\mathbf{M} = k (C'C \times FC')$ , con C' proiezione di C sul piano orizzontale Oxy;
- b) una molla di costante elastica  $k > 0$  applicata nel punto E della lamina e centro l’origine degli assi.

Supponendo il vincolo in F con attrito, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la lamina è disposta sul piano Oyz con il punto E in quiete, a distanza L da O, ed il punto D avente velocità  $\mathbf{v}_D = u_0 \mathbf{i}$ , con  $u_0 > 0$  ed  $\mathbf{i}$  versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

**Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno**

1. Se un sistema di vettori applicati è riducibile ad una coppia, esso possiede:
  - i) invariante scalare non nullo;
  - ii) invariante scalare nullo;
  - iii) invariante scalare positivo;
  - iv) invariante scalare negativo.
  
2. Data una lamina omogenea avente la forma di un triangolo equilatero, dire quanti assi centrali si conoscono a priori:
  - i) zero;
  - ii) uno;
  - iii) due;
  - iv) tre.
  
3. Dato un punto materiale vincolato a muoversi sulla superficie esterna di un guscio sferico, dire quanti gradi di libertà possiede:
  - i) due;
  - ii) tre;
  - iii) quattro;
  - iv) cinque.
  
4. Per un disco vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale in un piano  $\pi$ , la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è (G baricentro, H punto di contatto disco-guida):
  - i) il 2° teorema di Koenig;
  - ii) il 3° teorema di Koenig;
  - iii)  $\frac{1}{2} Mv_G^2$ ;
  - iv)  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_H$ .

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: \_\_\_\_\_ NOME: \_\_\_\_\_ NUMERO DI MATRICOLA: \_\_\_\_\_  
CORSO DI LAUREA: \_\_\_\_\_ FIRMA: \_\_\_\_\_

### SOLUZIONI

i) La lamina possiede due gradi di libertà, e si hanno due equazioni pure corrispondenti ai parametri lagrangiani  $y_E$ , coordinata del punto E, e  $\theta$ , angolo che il piano della lamina forma con il piano Oxy, considerato in verso orario. Un’equazione pura è la 1<sup>a</sup> ECD proiettata lungo Oy:

$$m \frac{d^2 y_E}{dt^2} = -ky_E + A$$

dove l’attrito A è dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica:

$$A = -f_d mg/2 \text{ (segn } dy_E/dt)$$

La 2<sup>a</sup> equazione pura è data dalla 2<sup>a</sup> ECD con polo in E proiettata lungo l’asse Oy:

$$-1/3 mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kL^2 \sin \theta \cos \theta$$

ii) All’istante iniziale le reazioni vincolari sono date da:

$$\phi_{F1}(0) = 0, \quad \phi_{F3}(0) = mg/2, \quad \phi_{E1}(0) = 0, \quad \phi_{E3}(0) = mg/2, \quad A(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio della lamina sono quattro per  $\theta$ , e la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce quelle per  $y_E$ :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = 0, & \theta_3 = \pi/2 \\ \theta_2 = \pi, & \theta_4 = 3\pi/2 \end{array}$$

$$\text{con} \quad -f_s(mg/2k) \leq y_E \leq f_s(mg/2k)$$

iv) Qualunque sia la posizione  $(\theta, y_E)$  le reazioni vincolari sono costanti:

$$\phi_{F1}(0) = 0, \quad \phi_{F3}(0) = mg/2, \quad \phi_{E1}(0) = 0, \quad \phi_{E3}(0) = mg/2, \quad \text{con } |A| \leq f_s mg/2.$$

### Soluzioni quesiti a risposta chiusa

**1. ii) – 2. iv) – 3. i) – 4. iv)**

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 2/9/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

**Quesiti a risposta aperta**

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ , che rotola senza strisciare lungo la retta di equazione  $y = -x$ , e da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  saldato nel centro  $C$  del disco. Una molla di costante elastica  $k > 0$  collega il centro  $C$  del disco all’origine degli assi. Sul sistema agiscono:

- a) una forza costante  $\mathbf{F} = F\mathbf{k}$  applicata nel generico punto  $T$  appartenente al bordo del disco, con  $\mathbf{k}$  versore dell’asse Oz;
- b) una coppia di forze di momento  $\mathbf{M} = (\text{OH} + \text{CH}) \times 2m\mathbf{g}$  agente sul disco, con  $H$  punto di contatto tra disco e retta.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;
- ii) le reazioni vincolari, interne ed esterne, agenti sul sistema all’istante iniziale quando il sistema è in quiete lungo la retta con il punto  $T$  nell’origine  $O$ .
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità;
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile.

**Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno**

1. In un piano Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una guida parabolica di equazione  $y = x^2$ . Il sistema di forze apparenti agenti sul punto è riducibile a:

- i) zero;            ii) un vettore applicato;            iii) una coppia;            iv) un vettore e una coppia.

2. Data una sbarra omogenea vincolata con un estremo ad un punto fisso, dire quanti assi centrali d’inerzia si conoscono a priori:

- i) zero;            ii) uno;            iii) due;            iv) tre.

3. Dato un disco vincolato a rotolare senza strisciare in un piano lungo una guida ellittica, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) zero            ii) uno            iii) tre            iv) cinque

4. Dato un disco omogeneo vincolato in un piano Oxy a scorrere con il baricentro  $G$  lungo l’asse Oy ed a ruotare con velocità angolare  $\omega$ , la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è:

- i) il 3° teorema di Koenig;    ii)  $1/2\omega \mathbf{K}_G$ ;    iii)  $1/2Mv_G^2$ ;    iv)  $1/2 M (y_G')^2 + 1/2 I_z \omega^2$ .

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 2/9/2010

**SOLUZIONI**

i) Il sistema possiede un grado di libertà, l’angolo  $\theta$ , preso in verso orario che, per scelta, il raggio CT del disco forma con il raggio CH, con H punto di contatto tra disco e retta di equazione  $y=-x$ , supponendo che  $R\theta(t=t_0)=0$ . L’equazione pura è data dalla 2<sup>a</sup> ECD proiettata sull’asse Hz:

$$(5/2) mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = kR^2\theta - (2)^{1/2}mgR\theta$$

ii) Le reazioni vincolari all’istante iniziale sono date da:

$\phi_{PS}(0) = mg(2)^{1/2}/2(-\rho+\eta)$ , con  $\rho$  e  $\eta$  versori lungo le direzioni, rispettivamente, parallela e normale alla retta di equazione  $y=-x$ ;

$$\phi_{C3}(0) = 0; \quad \phi_{T3}(0) = -F; \quad \phi_{H1}(0) = -mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H2}(0) = kR+mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

iii) Poiché il sistema di forze agenti è conservativo, applicando il teorema di Dirichlet l’unica posizione di equilibrio,  $\theta=0$ , sarà:

stabile se  $mg(2)^{1/2} < kR$ , instabile se  $mg(2)^{1/2} > kR$ , mentre per ogni  $\theta$ , con  $mg = kR$ , si hanno posizioni di equilibrio indifferente.

iv) Scegliendo la posizione  $\theta = 0$ , con  $mg(2)^{1/2} < kR$ :

$$\phi_{PS} = mg(2)^{1/2}/2(-\rho+\eta); \quad \phi_{C3} = 0; \quad \phi_{T3} = -F; \quad \phi_{H1} = -mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H2}(0) = kR+mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**  
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 16/09/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo.

L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

**Quesiti a risposta aperta**

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta AB di lunghezza 2R, la cui densità di massa nel generico punto P è data da  $\mu(P) = m/R^2|AP|$ ,  $m > 0$ . L’asta è vincolata a muoversi con attrito con l’estremo A sull’asse orizzontale Ox. Una forza costante  $\mathbf{F} = F \mathbf{k}$ , con  $\mathbf{k}$  versore dell’asse Oz ed F costante positiva, è applicata nel baricentro G del sistema, mentre una molla di costante elastica  $k > 0$  collega l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sull’asse Oy positivo a distanza 2R da O. Sul sistema, inoltre, agisce una coppia di forze di momento  $\mathbf{M} = (3/2) k (\mathbf{AG} \times \mathbf{OA})$ .

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse orizzontale Ox con il punto A in quiete nell’origine degli assi e l’estremo B sul semiasse negativo con velocità  $\mathbf{v}_B(0) = u_0 \mathbf{j}$ , essendo  $u_0 > 0$  e  $\mathbf{j}$  il versore dell’asse Oy. **(4 punti)**

Ponendo, ora,  $mg = (3/4) k R$ , g accelerazione di gravità, ed il coefficiente di attrito statico  $f_s = \sqrt{3}/3$ , determinare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

**Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno**

1. Data una lamina circolare vincolata a traslare lungo l’asse Oy, passante per il suo centro C e perpendicolare ad essa, in un sistema relativo Oxyz che ruota uniformemente intorno allo stesso asse, dire se il sistema di forze apparenti è riducibile a:

- i) zero
- ii) un vettore applicato
- iii) una coppia
- iv) un vettore e una coppia

2. Dato un sistema materiale costituito da un’asta saldata nel vertice di una lamina quadrata, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema materiale:

- i) sei
- ii) otto
- iii) dieci
- iv) dodici

3. Dato un corpo rigido con un punto fisso, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite ( $O'$  = origine solidale):

- i)  $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$
- ii)  $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$
- iii)  $dL = \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$
- iv)  $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un punto materiale vincolato con attrito ad un elica cilindrica, la, o le, equazioni pure del moto sono date da (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica):

- i) la 1<sup>a</sup> ECD
- ii) la 2<sup>a</sup> legge di Newton proiettata sulla normale all’elica
- iii) la 2<sup>a</sup> ECD proiettata sul piano normale all’elica
- iv) la 2<sup>a</sup> legge di Newton proiettata sulla tangente all’elica

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione *on-line* in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

**SOLUZIONI**

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani: l’angolo  $\theta$  che l’asta forma con l’asse Ox misurato in verso antiorario, e la coordinata  $x_A$  del vertice A dell’asta che trasla lungo l’asse Ox.

Una è la prima ECD proiettata lungo l’asse Ox:

$$2m \frac{d^2 x_A}{dt^2} - \frac{8}{3} mR \left[ \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \theta + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \right] = -k(x_A + 2R \cos \theta) + A$$

$$A = -f_d (\phi_{A2}^2 + \phi_{A3}^2)^{1/2} \text{segn}(v_A)$$

$$\phi_{A2} = \frac{8}{3} mR \left[ \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right] + 2mg + 2kR(\sin \theta - 1)$$

$$\phi_{A3} = 0$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Az per l’asta:

$$4 mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{8}{3} mR \frac{d^2 x_A}{dt^2} \sin \theta = 4 kR^2 \cos \theta - \frac{8}{3} mgR \cos \theta.$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

$$\phi_{G3}(0) = -F, \quad \phi_{A2}(0) = \frac{2}{3} kR + \frac{2}{9} mg, \quad \phi_{A3}(0) = 0, \quad A(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per  $\theta$  sono  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\theta_2 = 3\pi/2$  mentre per  $x_A$ :

$$\theta = \theta_1 = \pi/2 \quad \rightarrow \quad -R \sqrt{3}/2 \leq x_A \leq R \sqrt{3}/2$$

$$\theta = \theta_2 = 3\pi/2 \quad \rightarrow \quad -R \sqrt{5}/[2\sqrt{3}] \leq x_A \leq R \sqrt{5}/[2\sqrt{3}]$$

iv) Scelgo la posizione  $x_A = 0$  e  $\theta = \theta_1 = \pi/2$ :

$$\phi_{G3}(0) = -F, \quad \phi_{A2}(0) = \frac{3}{2} kR, \quad \phi_{A3}(0) = 0, \quad |A| \leq kR \sqrt{3}/2$$