Facoltà di Ingegneria
Università di Reggio Calabria

Appunti su Grandezze Fisiche, Analisi Dimensionale, Vettori

Prof. Giacomo Messina

1. Introduzione

La Fisica è una scienza sperimentale che studia i fenomeni che avvengono nel mondo esterno per giungere ad una accurata descrizione e interpretazione di essi e dei loro legami. L'obiettivo principale è quello di sviluppare delle teorie o dei modelli (basati su leggi fondamentali) che siano in grado di predire i risultati degli esperimenti. E' sufficiente un numero limitato di leggi fondamentali per spiegare un grandissimo numero di fenomeni fisici anche apparentemente scorrelati. Ad esempio le quattro equazioni di Maxwell descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici, dall'elettrostatica alla magnetostatica alla propagazione di onde elettromagnetiche. Esse racchiudono in sostanza tutto l'elettromagnetismo.

Le leggi della fisica nascono come generalizzazioni tratte da osservazioni e risultati sperimentali. Basti pensare alla legge di Newton della gravitazione universale, che è stata sviluppata mettendo insieme, grazie alla intuizione e alla genialità di Newton, una serie di osservazioni quali la forma delle traiettorie dei pianeti nel loro moto intorno al sole, l'accelerazione dei corpi in prossimità della superficie terrestre, l'accelerazione della luna nella sua orbita. Newton comprese che si trattava di aspetti differenti dello stesso problema.

Le leggi fisiche sono espresse di solito sotto forma di equazioni matematiche. Alcune leggi sono invece espresse sotto forma di disuguaglianza, come il secondo principio della Termodinamica.[1]

Ogni volta che sorgono discrepanze fra teoria ed esperimento occorre formulare nuove teorie o introdurre nuovi concetti. Un esempio classico di questo modo di procedere in fisica è quello della Meccanica Relativistica. La teoria di Newton, basata sulle trasformazioni di Galileo, predice che se un corpo ha velocità v' rispetto ad un sistema di riferimento O'x'y'z' e u è la velocità di questo sistema rispetto ad un altro Oxyz allora la velocità del corpo misurata da un osservatore posto nel sistema Oxyz è semplicemente v= v'+u (legge di addizione delle velocità di Galileo).Tuttavia, se si tratta di luce, l'osservatore in Oxyz misura lo stesso valore c che misurerebbe un osservatore in O'x'y'z'. Questo risultato sperimentale venne preso da Einstein come postulato della teoria della relatività ristretta: "La velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali, qualunque sia il moto della sorgente". Questo postulato, insieme al principio di omogeneità e di isotropia dello spazio (tutti i punti e tutte le direzioni dello spazio sono equivalenti) permise di trovare le corrette relazioni di trasformazione tra due sistemi inerziali in moto relativo con velocità costante, le cosiddette "trasformazioni di Lorentz". Tali relazioni si riducono a quelle di Galileo per velocità "piccole" rispetto a quella della luce.

2. Grandezze fisiche

Gli elementi fondamentali della fisica sono le "grandezze fisiche" in termini delle quali vengono espresse le sue leggi. Tra le grandezze fisiche annoveriamo lunghezza, intervalli di tempo, forza, velocità, temperatura, intensità di campo magnetico, intensità luminosa ecc.. Molti di questi termini, come lunghezza e forza, fanno parte del linguaggio quotidiano. In fisica però i termini associati alle grandezze fisiche vanno definiti in modo chiaro e preciso, evitando di confonderli con il loro significato nel linguaggio quotidiano. Per esempio in meccanica si parla di lavoro fatto da una forza che non ha nulla a che fare con il concetto quotidiano di lavoro, sinonimo di sforzo. Per il fisico, se un uomo tiene sulle spalle un grosso peso restando fermo non compie alcun lavoro, però sicuramente farà uno sforzo notevole.

Pertanto, prima di ricavare le relazioni esistenti tra grandezze fisiche, occorre definire tali grandezze in maniera univoca. Per questo motivo in fisica occorre dare una "definizione operativa" di una grandezza, una definizione che indichi l'insieme delle operazioni o dei

---

[1] Tale principio può essere così enunciato: "L'Entropia di un sistema isolato non può mai diminuire; essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, rimane costante se la trasformazione è reversibile". La sua formulazione matematica è: $\Delta S \geq 0$ in un sistema isolato.

.

procedimenti necessari alla sua misura. Una definizione non può essere considerata operativa se non indica un procedimento sperimentale tale da poter essere effettivamente eseguito. La "lunghezza" potrebbe essere definita in termini teorici come "estensione spaziale". Ma questa non sarebbe certo una definizione operativa. Viceversa la definizione operativa deve specificare un procedimento di conteggio. In termini operativi, per lunghezza di una determinata distanza lineare *l*, si intende il numero di volte, comprese le frazioni, che una determinata unità di lunghezza *u* è compresa nella distanza *l* che si vuole misurare.

Una definizione operativa può includere concetti fisici o matematici, purchè accuratamente specificati. Oltre al procedimento operativo del contare, la definizione di lunghezza implica, ad esempio, il concetto di corpo rigido, con il quale si intende un oggetto nel quale le reciproche distanze tra i suoi punti rimangono invariate in qualsiasi condizione. Chiaramente un corpo perfettamente rigido non esiste, è solo un'astrazione teorica, ma a tutti gli effetti pratici i solidi possono essere pensati come corpi rigidi.

3. Grandezze fondamentali e grandezze derivate

Molte grandezze fisiche non sono indipendenti tra loro, ma sono legate da relazioni che sono caratteristiche dei processi fisici nei quali sono coinvolte. Per esempio la velocità è il rapporto fra lo spazio percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo; la pressione è il rapporto fra la forza applicata perpendicolarmente a una superficie S e l'area della superficie stessa.

Tra tutte le grandezze fisiche ne viene scelto un piccolo numero che costituisce l'insieme delle "grandezze fondamentali". Per tali grandezze si fissa un'unità di misura, mediante un campione opportunamente definito. Le corrispondenti unità si chiamano "unità fondamentali". Le altre grandezze, le cui unità sono dedotte per mezzo delle relazioni che intercorrono con le grandezze fondamentali, si chiamano "grandezze derivate" e così le corrispondenti unità saranno chiamate "unità derivate". Tali unità possono restare così come sono, oppure si può dare loro un nome particolare. Per esempio la velocità e l'accelerazione sono grandezze derivate e le loro unità (nel Sistema Internazionale, definito più avanti) sono m/s e m/s^2. La forza è anch'essa una grandezza derivata e la sua unità è il Newton (N) dove $1\ N = 1\ kg*m/s^2$. L'insieme delle grandezze fondamentali e delle corrispondenti unità di misura costituisce un Sistema di Unità di Misura.

E' importante sfruttare le relazioni che intercorrono fra le grandezze fisiche in modo tale da ridurre al massimo il numero di unità da definire mediante un campione e in modo tale da semplificare certi fattori di proporzionalità che altrimenti rendono più complesse le formule che descrivono i processi fisici. [2]

[2] L'esempio più semplice è quello della forza di interazione fra cariche elettriche. Sperimentalmente si trova che la forza di interazione fra due cariche elettriche è proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra le cariche: $F \propto q_1q_2/r^2$ (legge di Coulomb). La grandezza fisica "carica elettrica" è legata alle grandezze fisiche "forza" e "lunghezza" dalla relazione di Coulomb. La cosa più semplice sarebbe quella di definire l'unità di carica come quella carica che posta a distanza unitaria da un'altra uguale dà luogo a una forza unitaria. Questo è proprio quello che si fa nel sistema C.G.S. (Centimetro, Grammo, Secondo o di Gauss). Si definisce la cosiddetta unità elettrostatica (detta u.e.s.) dalla relazione

$$1\ \text{dine} = (\text{u.e.s.})^2/\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \text{u.e.s.} = (1\ \text{dina}*\text{cm}^2)^{1/2}.$$

In questo sistema l'unità di intensità di corrente elettrica si misura in u.e.s./secondo. Nel Sistema Internazionale (S.I.) invece si fissa come grandezza fondamentale l'intensità di corrente, la cui unità è l'Ampere. L'unità di carica è invece il Coulomb (1C= 1A*1sec). La forza, come già detto, si misura in Newton e quindi nella relazione di Coulomb $F= K\ q_1q_2/r^2$ è tutto fissato; si deduce pertanto che la costante di proporzionalità K non può essere adimensionata, ma deve avere le dimensioni di $N*m^2/C^2$ e il suo valore numerico, misurato sperimentalmente, è $K= 8.9875*10^9$.

4. Il Sistema Internazionale (S.I.)

Per mettere ordine sulle delicate questioni riguardanti le grandezze fondamentali e la scelta dei campioni, nel 1875 diciassette paesi firmarono un trattato internazionale che istituiva l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure con sede a Sèvres, vicino Parigi. In questo ufficio, finanziato da più di 40 governi, sono depositati diversi campioni (il chilogrammo campione, il metro campione) e i prototipi internazionali dei diversi standard di misura (primari e secondari). Esso ha il compito di coordinare a livello internazionale la definizione delle tecniche di misura ed è in contatto con i laboratori di campionatura di tutto il mondo. Un ente internazionale, la Conferenza Generale di Pesi e Misure (CGPM) si riunisce periodicamente per proporre aggiornamenti e raccomandazioni. Il suo primo congresso si è tenuto nel 1889 mentre il 17^{mo} si è tenuto a Parigi nel 1983, in occasione del quale è stata data una nuova definizione del "metro", l'unità di misura della grandezza fondamentale "lunghezza" (nel S.I.).

Come già detto, ad ogni grandezza fondamentale viene assegnato un campione che, per essere accettato, deve essere:

1) "accessibile" e facilmente "riproducibile" in modo che per confronto possano essere costruiti altri;
2) "invariabile" cioè le sue caratteristiche non devono variare nel tempo. E'necessario quindi proteggerlo, a scapito però dell'accessibilità, che viene compromessa.

Tali requisiti (accessibilità e invariabilità) sono in contrasto fra loro ed è quindi necessario trovare un compromesso tra le varie esigenze.

Esistono numerosi sistemi di unità di misura. Oggi il più diffuso è il Sistema Internazionale (S.I.) fissato nella XI CGPM, tenutasi a Parigi nel 1960. Negli anni sono tuttavia state apportate alcune modifiche nelle definizioni delle unità (nel 1971, 1975, nel 1976 e nel 1983). IL S.I. è stato adottato ufficialmente dall'Italia con decreto legge del 14/4/1978 n.122, con entrata in vigore in tutti i campi entro il 31/12/1978.

Il S.I. è raccomandato per ogni uso scientifico e tecnologico. Questo sistema comprende (vedi tabella 1) 7 unità fondamentali e 2 supplementari (che sono in realtà grandezze derivate dalla lunghezza).

Tabella 1

Grandezze Fondamentali	Unità	Simbolo	Definizione
Lunghezza	Metro	m	Spazio percorso nel vuoto dalla luce in un tempo 1/c (c velocità della luce nel vuoto)
Massa	Chilogrammo	kg	Massa del prototipo di Platino-Iridio conservato a Sèvres
Tempo	Secondo	s	Tempo pari a 9.192.631.770 periodi di una particolare transizione dell'atomo di Cesio
Temperatura	Grado Kelvin	°K	1 °K= 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua
Intensità di Corrente	Ampere	A	Corrente elettrica costante che percorrendo due fili conduttori paralleli indefiniti distanti 1 metro fra loro e posti nel vuoto causa tra essi una forza di $2*10^{-7}$ N/m
Intensità Luminosa	Candela	cd	Intensità luminosa emessa da un corpo nero, a 2045 °K e sotto una pressione di 101325Pascal, in direzione perpendicolare al foro di uscita di sezione $1/6*10^{-5}m^2$
Quantità di Materia	Mole	mol	Quantità di materia che contiene tante unità elementari quanti sono gli atomi in 12 grammi di ^{12}C (numero di Avogadro pari a $6.02213674*10^{23}$)
Grandezze Supplementari	**Unità adimensionali**	**Simbolo**	**Definizione**
Angolo Piano	Radiante	rad	Data una circonferenza, il radiante è la misura dell'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio
Angolo Solido	Steradiante	sr	Data una superficie sferica, lo steradiante è la misura dell'angolo solido, con vertice nel centro della superficie sferica, che sottende una calotta sferica di area R^2

La conferenza del 1971 ha definito anche un particolare sistema di prefissi (vedi tabella 2) per i multipli e i sottomultipli delle unità delle grandezze fondamentali secondo potenze di 10. I prefissi che si riferiscono a potenze positive sono presi dal greco, quelli che si riferiscono a potenze negative dal latino, tranne "femto-" e "atto-" che derivano invece dal danese.

Tabella 2

Prefisso	**Abbr.**	**Fattore**	**Prefisso**	**Abbr.**	**Fattore**
Deca-	da	10^1	Deci-	d	10-^1
Etto-	h	10^2	Centi-	c	10^{-2}
Kilo-	k	10^3	Milli-	m	10^{-3}
Mega-	M	10^6	Micro-	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pico-	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto-	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto-	a	10^{-18}

Altri due importanti sistemi di misura sono in competizione con il S.I.; il sistema C.G.S. o di Gauss, in termini del quale è espressa la maggior parte della letteratura in fisica e il sistema britannico, tuttora in uso negli Stati Uniti e in Inghilterra, le cui grandezze fondamentali sono: la lunghezza (il piede), la forza (libbra) e il tempo (secondo).

Le grandezze fondamentali della Meccanica sono lunghezza, massa, tempo.

1) Lunghezza.
   L'unità di misura della lunghezza è il metro. Originariamente il metro fu definito dall'Accademia delle Scienze francese come la $40.000.000^{ma}$ parte della lunghezza del meridiano terrestre passante per Parigi. Venne realizzato, ai tempi della rivoluzione francese, un campione di platino-iridio, lega particolarmente stabile, con sezione ad x (inflessione trascurabile). Tuttavia ci si accorse più tardi che la relazione fra il meridiano terrestre e il metro campione differiva leggermente da quella assunta come vera (oggi si sa che la lunghezza del meridiano è 40.007.476 metri). Si poteva pertanto cambiare il campione oppure la definizione. Si scelse di cambiare la definizione di metro-campione, che non era più la $40.000.000^{ma}$ parte della lunghezza del meridiano terrestre, ma semplicemente la lunghezza di quella sbarra di platino-iridio. Successivamente alla XI CGPM fu adottato un nuovo campione di lunghezza prendendo come riferimento la lunghezza d'onda, nel vuoto, della radiazione rossa-arancione, corrispondente alla transizione tra i livelli $^2p_{10}$ e $^5d_5$ dell'atomo Kripton 86 (Kr^{86}).Gli atomi di Kr^{86} sono universalmente disponibili, sono identici ed emettono luce della stessa lunghezza d'onda. Questo isotopo può essere ottenuto con grande purezza in modo relativamente facile nei laboratori di campionatura di tutto il mondo. <u>Un metro fu esattamente definito come 1.650.763,73 volte la lunghezza d'onda di tale radiazione rosso-arancione.</u> Infine nel 1983 è stata data una nuova definizione di metro, basata sul principio di relatività ristretta secondo il quale la velocità della luce nel vuoto è una costante universale immutabile. Secondo questa nuova definizione (tabella 1) il metro è lo spazio percorso nel vuoto dalla luce in un tempo 1/c (c=velocità della luce nel vuoto=299.792.458 m/s).

2) Massa.
   L'unità di misura della massa è il chilogrammo. E' ancora valida la definizione data nel 1901: vale un chilogrammo la massa del prototipo di platino-iridio conservato a Sevres (cilindretto di diametro3.9 cm e altezza 3.9 cm, conservato sottovuoto). Le

masse di altri corpi si possono determinare per confronto con il chilogrammo campione, per esempio con la bilancia a bracci uguali.

3) Tempo.
L'unità di misura degli intervalli di tempo è il "secondo" Prima del 1960, il secondo era definito in termini del "giorno solare medio". Un secondo solare medio era alla 86400ma parte del giorno solare medio (1s= giorno solare medio/ (60*60*24)).[3] A causa di una lieve variazione della durata dell'anno tropico, questa definizione non è adatta agli usi scientifici, perché si avrebbe un campione di tempo non invariabile. Una definizione molto più precisa si può dare facendo riferimento alle transizioni atomiche, utilizzando il fatto che il passaggio di un elettrone atomico da un livello energetico ad un altro di energia inferiore (transizione atomica) è accompagnato dall'emissione di radiazione elettromagnetica di frequenza proporzionale alla differenza di energia fra i livelli interessati. Lo stato fondamentale (di energia minima) degli atomi dell'isotopo 133 del Cesio (Cs^{133}) è, in realtà, diviso in due livelli molto vicini fra loro a causa della interazione magnetica fra gli elettroni e il nucleo (struttura iperfine). La radiazione emessa durante la transizione fra questi due livelli ha una frequenza che cade nella regione delle microonde (circa 9.193 GHz). Il secondo campione è stato allora opportunamente ridefinito. Un secondo è l'intervallo di tempo pari a 9.192.631.770 periodi della radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi di Cs^{133} quando transitano fra i livelli iperfini dello stato fondamentale (uguale al secondo solare medio quale era nel 1900).

La tendenza è di riferirsi a fenomeni atomici per la costruzione di campioni migliori in quanto, oltre ad essere molto precisi, permettono di conciliare i requisiti di riproducibilità e invariabilità.

[3] Il giorno solare medio si ottiene, come è noto dalla geografia astronomica, dividendo l'intervallo di tempo compreso fra due equinozi di primavera (chiamato "anno tropico"), in 365,242201 intervalli di tempo uguali.

Analisi Dimensionale

Per la meccanica le grandezze fisiche fondamentali nel S.I. sono, come già detto, la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo, indicate rispettivamente con L, M, T. Si è visto prima che le unità di misura delle grandezze derivate sono ricavate attraverso quelle delle grandezze fondamentali sulla base della relazione fisica che intercorre fra la grandezza derivata e le grandezze fondamentali. Per esempio, la velocità media in un intervallo di tempo Δt in un moto unidimensionale è il rapporto fra lo spazio Δx percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo, cioè

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Cosa bisogna fare per determinare "le dimensioni" di questa grandezza derivata? Bisogna guardare alla relazione fisica che lega la grandezza derivata alle grandezze fondamentali, in questo caso lunghezza e tempo. La velocità è il rapporto fra una lunghezza e un intervallo di tempo, quindi le sue dimensioni saranno quelle di una lunghezza diviso per un tempo, cioè

$$[\bar{v}] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right] = \frac{L}{T} = L * T^{-1}$$

La parentesi quadra indica che si stanno calcolando le dimensioni di quella grandezza.

Si badi che questo risultato è indipendente dalle unità di misura scelte per le grandezze fondamentali (m/s nel S.I., cm/s nel sistema di Gauss o piedi/s in quello britannico).

ESEMPI

1) Accelerazione.

$$[\bar{a}] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = \frac{L * T^{-1}}{T} = L * T^{-2}$$

2) Forza.

$$[F] = [m * a] = M * L * T^{-2}$$

3) Energia Cinetica.

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = M\left(L * T^{-1}\right)^2 = M * L^2 * T^{-2}$$

4) Lavoro

$$[W] = [F.\Delta x] = MLT^{-2} * L = M * L^2 * T^{-2}$$

Il lavoro ha le stesse dimensioni dell'energia cinetica.

Queste relazioni prendono il nome di "Equazioni Dimensionali".

Ad ogni grandezza fisica è possibile pertanto associare le “dimensioni” che esprimono il legame fra questa grandezza e quelle fondamentali. L’utilità delle equazioni dimensionali risiede nel fatto che esse consentono di fare un’analisi dimensionale delle relazioni fisiche. Data una relazione fisica, se si sostituisce ad ogni grandezza fisica che compare nella relazione le sue dimensioni e si trattano i simboli delle grandezze fondamentali come quantità algebriche, ciascun membro della relazione deve avere le medesime dimensioni affinchè la relazione sia corretta. Per esempio, nello studio del moto rettilineo uniformemente accelerato ricaveremo che lo spazio percorso è legato all’accelerazione e al tempo dalla relazione $x=½at^2$.
Da un punto di vista dimensionale:

$$[x]=\left[\frac{1}{2}at^2\right]=\frac{L}{T^2}*T^2=L$$

Questa è un’equazione dimensionalmente corretta, dato che le dimensioni del primo membro sono uguali a quelle del secondo. Naturalmente il fatto che i due membri siano dimensionalmente omogenei è condizione necessaria ma non sufficiente per la correttezza dell’equazione. Per esempio se avessimo ricavato che il legame fra spazio percorso, accelerazione e tempo in un moto uniformemente accelerato è dato dalla relazione $x=3at^2$, per l’analisi dimensionale il risultato sarebbe “dimensionalmente consistente”, mentre esso è sbagliato per un fattore moltiplicativo (3 invece di ½).

Se le dimensioni del 1° membro di un’equazione che abbiamo ricavato non sono le stesse di quelle del secondo membro, allora l’equazione è sicuramente sbagliata. Un esempio di equazione non corretta può essere il seguente:

$$a=h/mt$$

$$\left[\frac{h}{m*t}\right]=L*M^{-1}*T^{-1}$$

Tali dimensioni risultano diverse da quelle di a ($L*T^{-2}$), quindi l’equazione è sicuramente non corretta. Si commetterebbe un grave errore se non ci si accorgesse di un’inconsistenza di questo tipo.

L’analisi dimensionale ha un’altra utile applicazione che consiste nel ricavare le dimensioni, e quindi le unità di misura, di certe costanti che compaiono nelle leggi fisiche. Per esempio:

1) $F= -\gamma v$ (forza di attrito viscoso);

$$M*L*T^{-2}=[\gamma]*L*T^{-1}$$

da cui si ricava che le dimensioni di γ sono $M\,T^{-1}$ e la corrispondente unità è $kg\ s^{-1}$.

2) $F= -k*x$ (forza di richiamo di una molla (legge di Hooke))

$$M*L*T^{-2}=[k]*L$$

da cui si ricava che le dimensioni di k sono $M*\ T^{-2}$ e la sua unità è $kg*\ s^{-2}$.

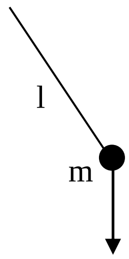
3) $F=G*m_1*m_2/r^2$ (legge di gravitazione universale di Newton)

$$M*L*T^{-2}=[G]*M^2*L^{-2}$$

da cui si ricava che le dimensioni di G sono $L^3*M^{-1}*T^{-2}$ e la sua unità è $m^3*kg^{-1}*s^{-2}$.

Infine mediante considerazioni dimensionali è possibile dedurre informazioni sulla <u>forma algebrica</u> di alcune leggi fisiche:

1) Periodo pendolo.
   Un pendolo semplice può essere considerato come un filo di lunghezza l, fissato ad un estremo,e che porta all'altro estremo una massa m, soggetta alla forza di gravità. Il suo periodo τ di oscillazione deve dipendere necessariamente dalle grandezze in gioco e cioè dalla lunghezza l del filo, dal valore della massa m attaccata e dall'accelerazione di gravità g.



Si ipotizza pertanto una legge del tipo: $\tau= K*l^x*m^y*g^z$ dove K è una costante adimensionale e gli esponenti x, y e z, incogniti, sono da determinare con l'ausilio dell'analisi dimensionale. Confrontando le dimensioni dei due membri della precedente relazione si ha (τ è un tempo e g una accelerazione):

$$[\tau]= L^x M^y (LT^{-2})^z$$

da cui $$T= L^x M^y L^z T^{-2z}$$

e $$L^0 M^0 T^1 = L^{x+z} M^y T^{-2z}$$

e, infine, uguagliando gli esponenti (a primo membro L e M hanno esponente 0) si ha il sistema:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ -2z=1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=1/2 \\ y=0 \\ z=-1/2 \end{cases}$$

sostituendo tali valori nell'espressione di τ si ha:

$$\tau = K*l^{\frac{1}{2}}*g^{-\frac{1}{2}} = K\sqrt{\frac{l}{g}}$$

che è l'espressione effettiva di τ, ricavabile per altra via dalla teoria del pendolo semplice.

Si noti che K non può essere ricavata con l'analisi dimensionale, ma solo per via teorica ($K=2\pi$) e questo vale per tutte le costanti.

2) Velocità di propagazione di un'onda trasversale su una corda.
Si consideri una corda di lunghezza l e massa m, a cui è applicata una forza F (tensione della fune), su cui si propaga un'onda con velocità v. In maniera analoga al caso precedente possiamo ipotizzare che v dipenda dalla tensione della corda, dalla sua lunghezza l e dalla sua massa m secondo una legge del tipo

$$v= K\ F^x\ l^y\ m^z$$

Utilizzando sempre l'analisi dimensionale, possiamo scrivere:

$$L\, T^{-1} = (M\, L\, T^{-2})^x\ L^y\ M^z$$

da cui si ha

$$L\, T^{-1}= T^{-2x}\ L^{x+y}\ M^{x+z}$$

e quindi il sistema:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+y=1 \\ -2x=-1 \end{cases} \qquad \text{cioè } x= ½;\ y= ½;\ z= -1/2$$

questi coefficienti sostituiti nella relazione iniziale, permettono di ritrovare l'effettiva legge con cui varia v, cioè

$$v = k\sqrt{\frac{F\ l}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{l}}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

essendo $\mu= m/l$ la densità lineare. La teoria mostra infine che K=1.

3) Legge di Stokes..
Un corpo sferico di massa m e raggio R che cade con velocità v in un fluido avente coefficiente di viscosità η è sottoposto ad una forza di attrito viscoso (forza di Stokes). Tale forza deve dipendere dalla viscosità del mezzo, dalle dimensioni geometriche del corpo, e dalla sua velocità. Ipotizziamo pertanto una legge del tipo: $F= -K\ \eta^x\ R^y\ v^z$.
Dalla teoria dei fluidi reali, si può ricavare che le dimensioni del coefficiente di viscosità η sono $M\ L^{-1}\ T^{-1}$. Pertanto, procedendo come descritto nei due esempi precedenti, si trova che:

$$M\, L\, T^{-2}= (M\, L^{-1}\, T^{-1})^x\, L^y\ (LT^{-1})^z$$

da cui si ha

$$M\, L\, T^{-2}= M^x\ L^{-x+y+z}\ T^{-x-z}$$

Uguagliando gli esponenti del primo e del secondo membro si ha:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -x+y+z = 1 \\ -x-z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Da cui segue la legge:

$$F= k\ \eta R v$$

La teoria mostra che $K=6\pi$. Pertanto la legge di Stokes, molto utilizzata nella meccanica dei fluidi, si può esprimere come:

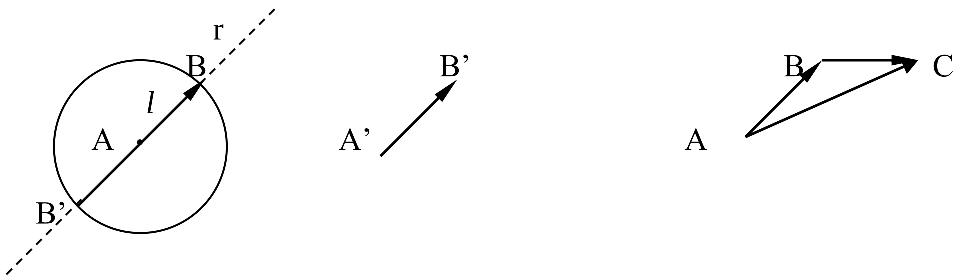
$$F=-6\pi\ \eta R v$$

Il segno negativo esprime il fatto che tale forza di attrito è diretta in verso opposto al moto del corpo.

VETTORI

Introduzione

Le leggi della Fisica sono espresse da equazioni matematiche nelle quali compaiono *quantità* che descrivono le grandezze fisiche considerate. Alcune di queste grandezze possono essere rappresentante da un solo numero che dà il valore della grandezza rispetto ad una assegnata unità di misura. Questo numero è in generale una funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Queste grandezze sono chiamate grandezze scalari o semplicemente scalari. Esempio: la temperatura dell'aria in un dato luogo $T=T(x,y,z,t)$. Altri esempi sono la massa e il volume di un corpo, gli intervalli di tempo, la densità di un materiale, l'energia.
Ci sono però situazioni in cui un solo numero non è sufficiente a descrivere completamente una grandezza fisica. L'esempio più semplice è quello spostamento di una particella nello spazio. Per *spostamento* intendiamo il *cambiamento di posizione* della particella. Supponiamo che la particella sia nella posizione A. Se diciamo di volere compiere uno spostamento rettilineo di lunghezza *l*, abbiamo specificato di quanto ci siamo allontanati da A, ma non possiamo determinare dove arriviamo: tutti i punti che stanno su una superficie sferica di centro A e raggio *l* sono possibili punti di arrivo. Se precisiamo la direzione r dello spostamento possiamo ancora arrivare in due punti diametralmente opposti sulla superficie sferica (B e B'); solo se indichiamo il verso di percorrenza lungo r il risultato è univoco. Uno spostamento è quindi caratterizzato da un numero, il *modulo*, che ne dà il valore in assoluto, da una *direzione* e da un *verso*. Graficamente possiamo rappresentare lo spostamento da A a B con segmento che unisce A e B munito di freccia per indicare il verso di percorrenza sulla retta che congiunge A e B.



Si noti che uno spostamento della particella da A' a B', avente la stessa lunghezza dello spostamento AB, la stessa direzione e lo stesso verso, rappresenta il <u>medesimo spostamento</u>, in quanto rappresenta lo stesso cambiamento di posizione. (Questa constatazione porterà alla definizione di uguaglianza di vettori).
Possiamo immaginare di fare un ulteriore spostamento da B a C. L'effetto complessivo dei due spostamenti è equivalente allo spostamento da A a C. Diamo allora che AC è somma o risultante degli spostamenti AB e BC. Si noti che questa non è una somma algebrica e che un numero da solo non è sufficiente per specificarla.

Le grandezze che si comportano come gli spostamenti sono chiamate vettori. Diamo quindi la seguente definizione:
i vettori sono grandezze caratterizzate da una direzione, da un verso e da un valore numerico chiamato ampiezza (o modulo), e che si combinano secondo determinate regole di addizione che specificheremo fra breve.
Le grandezze che sono completamente determinate da un numero che ne rappresenta la misura rispetto ad una assegnata unità di misura sono invece chiamate "scalari" (grandezze scalari).

Due sono le proprietà fondamentali della notazione vettoriale:

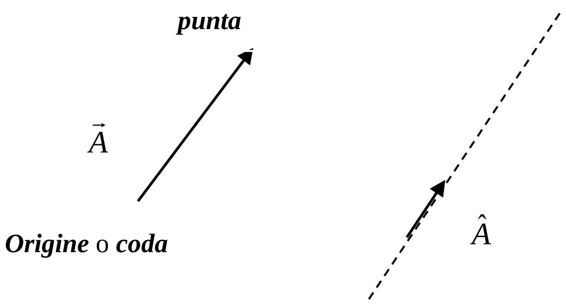
1. la formulazione delle leggi fisiche in forma vettoriale è indipendente dalla scelta del sistema di assi coordinati. La notazione vettoriale offre un linguaggio in cui le espressioni hanno un significato fisico intrinseco, indipendente dal sistema di coordinate.

2. il simbolismo vettoriale è conciso. Molte leggi fisiche hanno un aspetto più semplice in notazione vettoriale rispetto a quando sono espresse relativamente ad un particolare sistema di coordinate.

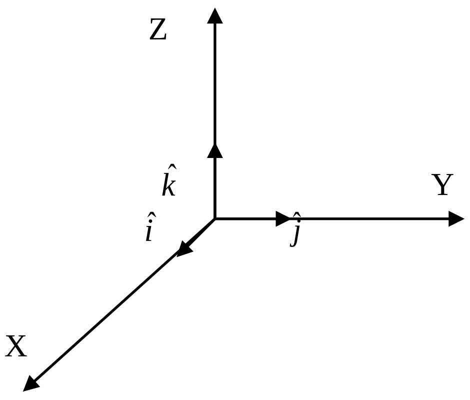
Per segnalare la natura vettoriale di una grandezza viene usata una lettera stampata in neretto **A** (grassetto) oppure una lettera con una freccetta sopra $\vec{A}$. Il modulo del vettore viene indicato con $|\vec{A}|$ oppure semplicemente con *A*. Per rappresentare un vettore su un diagramma si usa una freccia la cui lunghezza è proporzionale all'ampiezza del vettore, la cui direzione è coincidente con quella del vettore e la cui punta dà il verso del vettore.

Versori

Un vettore di modulo 1 con la direzione ed il verso di $\vec{A}$ viene chiamato"*versore* di $\vec{A}$ " ed è indicato con $\hat{A}$.

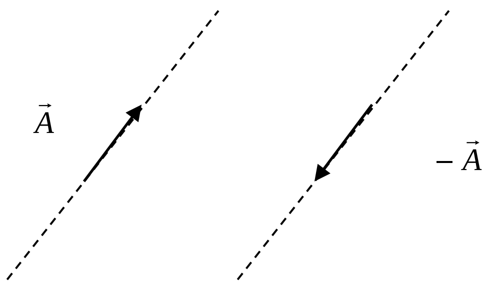


I versori degli assi coordinati vengono solitamente indicati con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ oppure con $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$



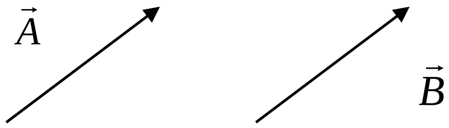
Opposto di un vettore

Un vettore $\vec{A}'$ che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{A}$, ma verso opposto è indicato con $-\vec{A}$. Il segno "-" davanti a un vettore ne cambia semplicemente il verso.



Uguaglianza fra due vettori

Due vettori si dicono uguali se hanno stesso modulo, stessa direzione e stesso verso.



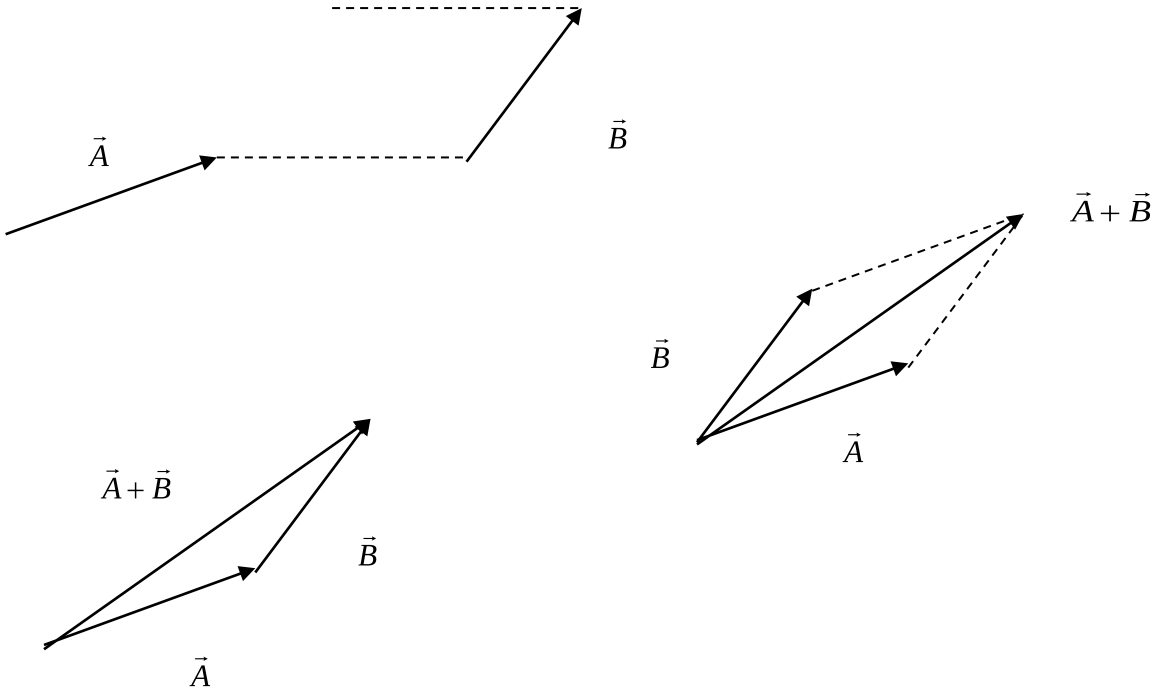
Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Il prodotto di uno scalare K per un vettore $\vec{A}$ è un nuovo vettore il cui modulo è |K| volte il modulo del vettore $\vec{A}$, la cui direzione coincide con quella di $\vec{A}$, e il cui verso è uguale a quello di $\vec{A}$ se K>0 oppure è opposto a quello di $\vec{A}$ se K<0.
Ovviamente dividere un vettore per uno scalare K significa moltiplicare il vettore per il reciproco dello scalare (moltiplicare per 1/K).
Il vettore $\vec{A}$ può essere espresso tramite il versore $\hat{A}$ attraverso la relazione:

$$\vec{A} = A\hat{A}$$

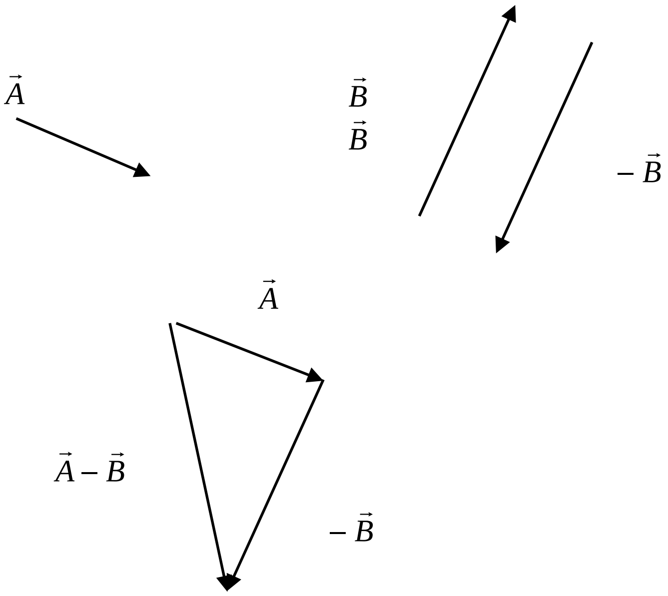
Somma e differenza di vettori

La somma di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si definisce tramite la costruzione geometrica in figura.
Si trasporta $\vec{B}$ parallelamente a se stesso fino a fare coincidere l'origine (la "coda") di $\vec{B}$ con la punta di $\vec{A}$. Il vettore che ha per direzione quella della congiungente la coda di $\vec{A}$ con la punta di $\vec{B}$ che ha per modulo la lunghezza del segmento che ha questi due punti per estremi, e verso dalla coda del primo alla punta del secondo è per definizione $\vec{A}+\vec{B}$.

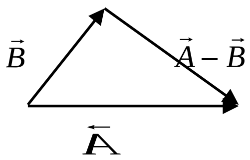


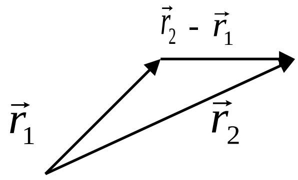
La *sottrazione* fra i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è definita come la somma di $\vec{A}$ con il vettore $-\vec{B}$.

$$\vec{A}-\vec{B} \equiv \vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$



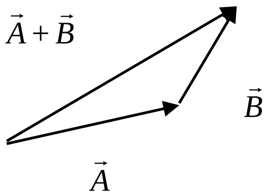
Se i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno l'origine in comune, il vettore $\vec{A}-\vec{B}$ va dalla punta di $\vec{B}$ alla punta di $\vec{A}$ e rappresenta una diagonale del parallelogramma formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
Se $\vec{r}_1$ rappresenta la posizione di una particella ad un istante di tempo t_1 ed $\vec{r}_2$ la sua posizione ad un istante t_2, il vettore $\vec{r}_2$ - $\vec{r}_1$ rappresenta il vettore spostamento della particella e va dalla punta di $\vec{r}_1$ alla punta di $\vec{r}_2$.

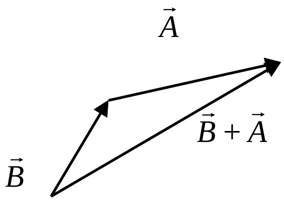




La somma vettoriale gode della *proprietà commutativa*:

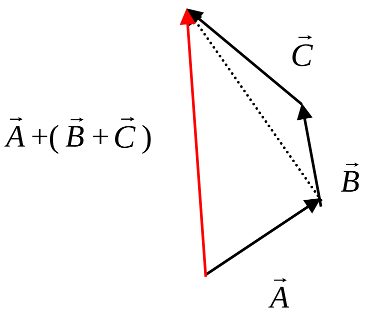
$$\vec{A}+\vec{B} \equiv \vec{B}+\vec{A}$$

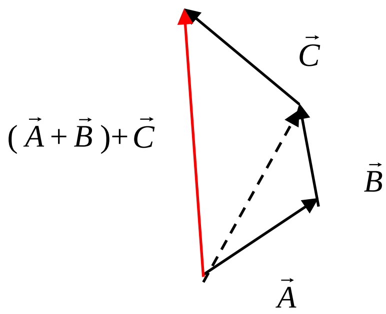




La somma vettoriale gode della *propritá associativa*:

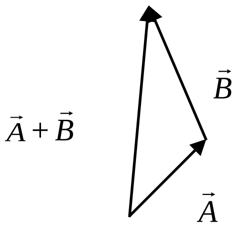
$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

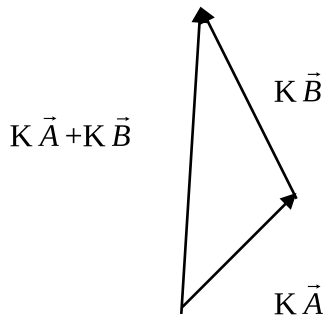




La somma vettoriale gode della *proprietà distributiva* rispetto al prodotto con uno scalare:

$$K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$$





I triangoli sono simili. La lunghezza di K$\vec{A}$+K$\vec{B}$ è K-volte la lunghezza di $\vec{A}+\vec{B}$. Quindi K$\vec{A}$+K$\vec{B}$ ha la stessa direzione e verso di $\vec{A}+\vec{B}$ e modulo:

$$\left|K\vec{A}+K\vec{B}\right| = K\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$$

dimostrando così l'uguaglianza.

Vettori e grandezze fisiche

Affinché una grandezza fisica sia rappresentabile come un vettore deve:

- avere modulo, direzione e verso indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate;
- soddisfare la legge della somma dei vettori (*regola del parallelogramma*).

Scomposizione e addizione dei vettori: metodo analitico

Il metodo geometrico per la somma di due o più vettori non è utile per vettori in 3 dimensioni. Si usa allora il metodo analitico che conporta la scomposizione di un vettore nelle sue componenti rispetto ad un particolare sistema di coordinate. Il vettore $\vec{A}$ può essere pensato come la risultante di due vettori uno lungo x ($\overrightarrow{OX}$) ed uno lungo y ($\overrightarrow{OY}$) :

$$\vec{A} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

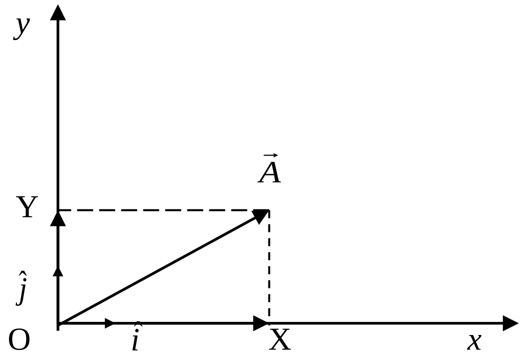
I vettori $\overrightarrow{OX}$ ed $\overrightarrow{OY}$ possono essere espressi attraverso i versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$ degli assi x ed y attraverso le relazioni:

$$\overrightarrow{OX} = A_X\,\hat{i}$$
$$\overrightarrow{OY} = A_Y\,\hat{j}$$

I numeri A_x e A_y sono detti *le componenti* di $\vec{A}$ lungo x e lungo y (A_x e A_y sono numeri con segno). Le relazioni che legano A_x ed A_y ad A e θ sono le stesse di quelle che legano le coordinate cartesiane e le coordinate polari, cioè:

$A_x = A\cos\theta$ $\qquad$ $A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}$

$A_y = A\,\mathrm{sen}\theta \qquad \mathrm{tg}\theta = A_y/A_x$



Il vettore A può quindi essere espresso come

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

I vettori $A_x\hat{i}$ e $A_y\hat{j}$ sono detti *i vettori componenti* di $\vec{A}$ o semplicemente i *componenti* di $\vec{A}$.

Consideriamo allora due vettori

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad\qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

il vettore somma sarà

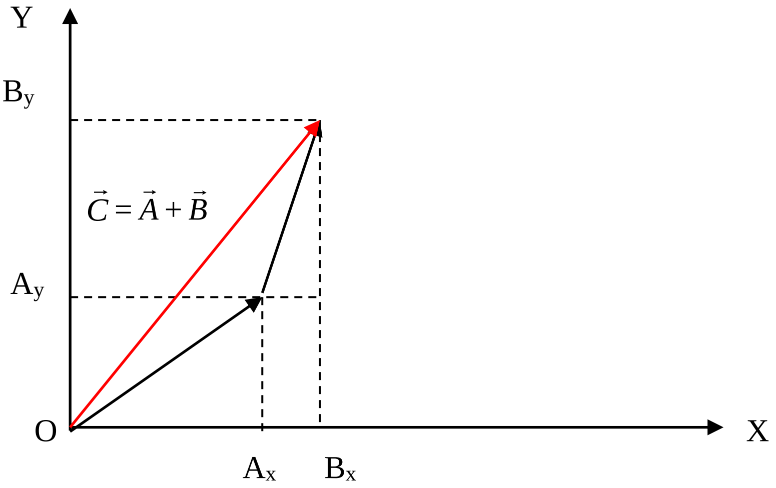
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) =$$
$$= A_x\hat{i} + B_x\hat{i} + A_y\hat{j} + B_y\hat{j} =$$
$$= (A_x + B_x)\ \hat{i}\ \ (A_y + B_y)\ \hat{j} =$$
$$= C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$

dove

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

In altre parole la componente del vettore somma lungo un determinato asse è data dalla somma algebrica delle singole componenti dei vettori di partenza lungo quell'asse.



$$|C| = \sqrt{C_X^2 + C_Y^2} = \sqrt{(A_X + B_X)^2 + (A_Y + B_Y)^2}$$

$$tg\theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

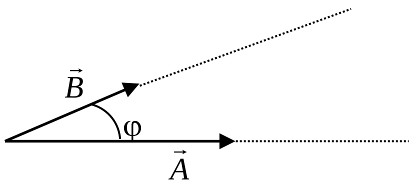
Moltiplicazione fra vettori

Risulta utile definire due diversi tipi di moltiplicazione tra vettori:

1. moltiplicazione tra vettori che dà origine a uno scalare (prodotto scalare)
2. moltiplicazione tra vettori che dà origine a un vettore (prodotto vettoriale)

Prodotto scalare

Si definisce prodotto scalare di $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e si indica col simbolo $\vec{A} \bullet \vec{B}$, quel numero che si ottiene moltiplicando moduli di $\vec{A}$ e di $\vec{B}$ per il coseno dell'angolo fra essi compreso.



$\vec{A} \bullet \vec{B}$ =ABcosφ=A(Bcosφ)=(Acosφ)B=BAcosφ

Prodotto del modulo di $\vec{B}$ per la componente di $\vec{A}$ nella direzione di $\vec{B}$

Prodotto del modulo di $\vec{A}$ per la componente di $\vec{B}$ nella direzione di $\vec{A}$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$$

dato che l'angolo formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è lo stesso di quello formato da $\vec{B}$ ed $\vec{A}$.

Il prodotto scalare è:

- positivo se i due vettori formano un angolo acuto $0<\varphi<\pi/2$;
- negativo se i due vettori formano un angolo ottuso;

Se $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\cos\varphi=0$ cioè $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali ($\varphi=\pi/2$)

Se i due vettori hanno stessa direzione e verso allora $\vec{A} \bullet \vec{B}$ = AB (in particolare $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2$)

Non esiste "l'operazione inversa" del prodotto scalare:

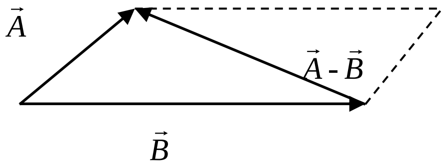
se $\vec{A} \bullet \vec{X} = b$ $\Longrightarrow$ $\vec{X}$ non è univocamente determinato.

Chiaramente non ha senso parlare di proprietà associativa.

Vale la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$$

Esempio:



$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{D} \bullet \vec{D} = (\vec{A} - \vec{B}) \bullet (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \bullet \vec{A} - \vec{A} \bullet \vec{B} - \vec{B} \bullet \vec{A} + \vec{B} \bullet \vec{B} =$$

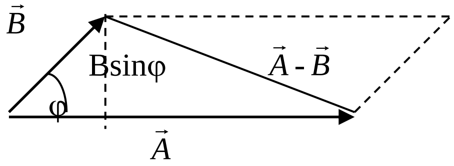
$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\varphi$$

Questa relazione è nota in trigonometria come "legge del coseno o di Carnot", e si riduce al teorema di Pitagora per $\phi=\pi/2$.

Ci si potrebbe chiedere il perchè di una definizione così "strana" di prodotto. Non sarebbe stato più semplice utilizzare il semplice prodotto dei moduli? E' facile vedere che, se il prodotto scalare fosse definito semplicemente come il prodotto dei moduli dei due vettori, non varrebbe la proprietà distributiva. Indichiamo infatti con $\otimes$ questa operazione $\vec{A} \otimes \vec{B}$ =AB. Se $\vec{D} = \vec{B} + \vec{C}$, allora $\vec{A} \otimes (\vec{B} + \vec{C}) = |\vec{A}|\,|\vec{B} + \vec{C}|$ che in generale è diverso da $|\vec{A}|\,|\vec{B}| + |\vec{A}|\,|\vec{C}|$. Per esempio se $\vec{B}$ e $\vec{C}$ sono l'uno l'opposto dell'altro allora $(\vec{B} + \vec{C}) = 0$ e quindi $|\vec{A}|\,|\vec{B} + \vec{C}| = 0$, mentre $|\vec{A}|\,|\vec{B}| + |\vec{A}|\,|\vec{C}|$ è sicuramente positivo.

Prodotto vettoriale

Si definisce prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$ (indicato anche come $\vec{A}\wedge\vec{B}$) di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ un vettore il cui modulo è dato dal prodotto del modulo di $\vec{A}$ per il modulo di $\vec{B}$ per il seno dell'angolo formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$, la cui direzione è quella della normale al piano individuato da $\vec{A}$ e da $\vec{B}$ e il cui verso è quello indicato dal pollice della mano destra quando il vettore $\vec{A}$ va verso $\vec{B}$ nel senso dell'angolo minore (regola della mano destra).



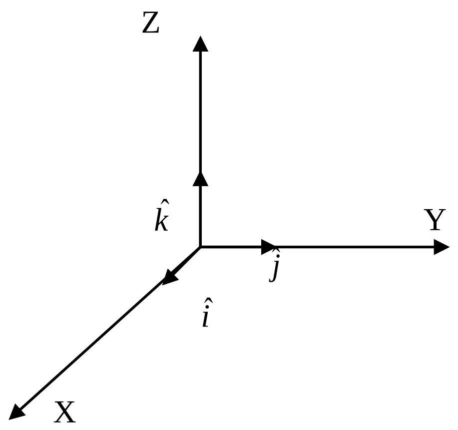
$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\operatorname{sen}\varphi = A(B\operatorname{sen}\varphi)$$

Il modulo del prodotto vettoriale di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ rappresenta l'area del parallelogramma i cui lati non paralleli sono i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
L'area del triangolo che ha per lati i due vettori ed il vettore differenza $\vec{A}-\vec{B}$ sarà allora pari a ½$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo. E' invece massimo quando i due vettori sono ortogonali (senφ=1).

Per il prodotto vettoriale vale la proprietà distributiva: $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

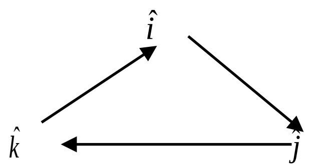
Valgono le seguenti relazioni fra i versori:



$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$
$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$
$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{i}=0$$
$$\hat{j}\times\hat{j}=0$$
$$\hat{k}\times\hat{k}=0$$

Le relazioni di sopra possono essere facilmente ricordate utilizzando il seguente "triangolo" da percorrere in senso orario (i per j dà k, j per k dà i, k per i dà)



Possiamo esprimere il prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$ attraverso le componenti di $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_X\ \hat{i} + A_Y\ \hat{j} + A_Z\ \hat{k})\times(B_X\ \hat{i} + B_Y\ \hat{j} + B_Z\ \hat{k}) =$$

$$\begin{aligned} = & A_X\ B_X\ \hat{i}\times\hat{i} + A_X\ B_Y\ \hat{i}\times\hat{j} + A_X\ B_Z\ \hat{i}\times\hat{k} + \\ & A_Y\ B_X\ \hat{j}\times\hat{i} + A_Y\ B_Y\ \hat{j}\times\hat{j} + A_Y\ B_Z\ \hat{j}\times\hat{k} + \\ & A_Z\ B_X\ \hat{k}\times\hat{i} + A_Z\ B_Y\ \hat{k}\times\hat{j} + A_Z\ B_Z\ \hat{k}\times\hat{k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & (A_X\ B_Y - A_Y\ B_X)\,\hat{k} + \\ & (A_Z\ B_X - A_X\ B_Z)\,\hat{j} + \\ & (A_Y\ B_Z - A_Z\ B_Y)\,\hat{i} \end{aligned}$$

I termini che moltiplicano i versori coincidono con gli sviluppi di determinanti del secondo ordine

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_Y & A_Z \\ B_Y & B_Z \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} A_X & A_Z \\ B_X & B_Z \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} A_X & A_Y \\ B_X & B_Y \end{vmatrix}\hat{k}$$

Per il prodotto vettoriale non vale la *proprietà associativa*:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

Per verificare ciò basta calcolare il primo e il secondo membro per $\vec{A} = \hat{i}$ $\vec{B} = \hat{j}$ $\vec{C} = \hat{j} + \hat{k}$.

Si dimostra che per il *doppio prodotto vettore* valgono le relazioni:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\bullet\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}\bullet\vec{B})\,\vec{C}$$

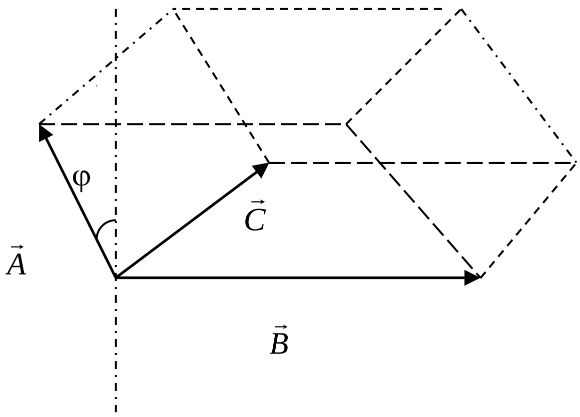
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\bullet\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{B}\bullet\vec{C})\,\vec{A}$$

Prodotto misto

L'espressione

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C})$$

si indica come *prodotto misto* e si dimostra essere uguale al volume del parallelepipedo formato dai tre vettori.



Essendo il volume pari all'area della base per l'altezza,

$$\text{area della base} = \left|\vec{B} \times \vec{C}\right|$$

$$\text{altezza} = A \cos\varphi$$

$$\text{volume} = A\left|\vec{B} \times \vec{C}\right| \cos\varphi = \vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C})$$

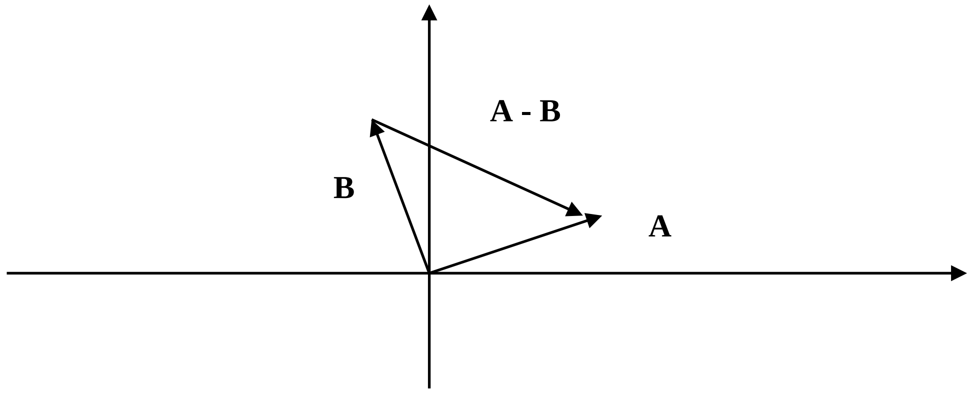
Si dimostra che un prodotto misto non cambia permutando ciclicamente l'ordine dei vettori:

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A})$$

tali uguaglianze sono concettualmente banali in quanto rappresentano tutte il volume del parallelepipedo formato da $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$.

Esercizio N. 1

Due punti in un piano hanno coordinate polari P_1=(2.50*m*, 30°) e P_2=(3.80*m*, 120°). Determinare (a) le coordinate cartesiane dei due punti e (b) la distanza fra loro.



(a)

Le coordinate cartesiane dei due punti sono:

$$x_1 = 2.5m \cdot \cos(30°) = 2.17m$$
$$y_1 = 2.5m \cdot sin(30°) = 1.25m$$
$$x_2 = 3.8m \cdot \cos(120°) = -1.9m$$
$$y_2 = 3.8m \cdot sin(120°) = 3.29m$$

(b)

La distanza fra i due punti è data dal modulo del vettore **A-B**

A=2.17**i** +1.25**j**

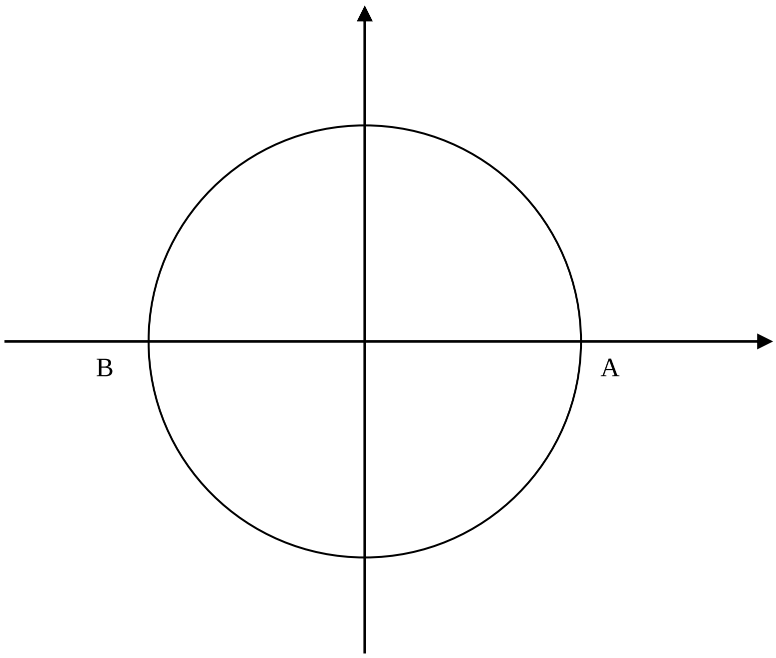
B= -1.90**i** +3.29**j**

A – **B** = (2.17+1.90)**i** +(1.25-3.29)**j** = 4.07**i** – 2.04**j**

$$|\mathbf{A - B}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 4.55m$$

Esercizio N. 2

Una persona cammina lungo un percorso circolare di raggio 5*m*, per una mezza circonferenza. Trovare (a) il modulo del vettore spostamento, (b) la effettiva distanza percorsa, (c) qual è il modulo dello spostamento se si completa la circonferenza?



Il punto iniziale ha coordinate A=(5m,0) mentre il punto finale ha coordinate B=(-5m,0), quindi il vettore spostamento avrà componenti:

AB = $(B_x\text{-}A_x)$**i**+$(B_y\text{-}A_y)$**j** = (-5m-5m)**i**+(0-0)**j** = -10m**i**+0**j**

il modulo del vettore spostamento quindi sarà:

|**AB**|= $\sqrt{(-10)^2 + 0^2} = 10\text{m}$

la effettiva distanza percorsa S è uguale alla metà della lunghezza della circonferenza, quindi:

S = $(2\pi R)/2 = (2\pi\cdot 5\text{m})/2 = 15.7\text{m}$.

Se si completa la circonferenza il punto finale coincide con il punto iniziale, quindi il vettore spostamento sarà il vettore nullo che ha modulo uguale a zero.

Esercizio N. 3

Due vettori sono dati da **A**= 3**i** -2**j** e **B**= **-i** –4**j** calcolare (a) **A**+**B**, (b) **A-B**, (c) |**A**+**B|,** (d) | **A-B**|, (e) la direzione di **A**+**B** e **A-B** .

(a)

A+**B** = (3-1)**i** + (-2-4)**j**=2**i** - 6**j**

(b)

A-B = (3+1)**i** + (-2+4)**j**=4**i** +2**j**

(c)

|**A**+**B**| = $[2^2 + (-6)^2]^{1/2} = 6.32$

(d)
|**A-B**| = $[4^2 + 2^2]^{1/2} = 4.47$

(e)

Per trovare la direzione occorre valutare l'angolo che un vettore forma col semiasse positivo delle ascisse. Ricordando che
$tg\theta = y/x$ si ha:

$\theta_{A+B} = arctg(-6/2) = -71.6° + k\ 180°$

dove k è un numero intero. Per determinare il valore di k basta tener conto del segno delle componenti: dato che la componente y è negativa mentre la componente x è positiva, il vettore giace nel IV quadrante, e quindi k =0.

$\theta_{A-B} = arctg(2/4) = 26.6° + k\ 180°$

Per quanto detto sopra, il vettore, avendo entrambe le componenti positive, giace nel primo quadrante, pertanto anche in questo caso si ha k=0.

Esercizio N. 4

Una particella è soggetta a due spostamenti, **A** e **B**. Il primo ha un modulo di 150cm e forma un angolo di 120° con l'asse x positivo. Lo spostamento risultante **R** ha un modulo di 140cm ed è diretto con un angolo di 35° rispetto all'asse x positivo. Trovare il modulo e la direzione del secondo spostamento.

A_x=150cm cos(120°)= -75cm

A_y=150cm sin(120°)= 130cm

R_x=140cm cos(35°)= 114.6cm

R_y=140cm sin(35°)= 80.3cm

Poiché **R**= **A**+**B** possiamo ottenere:

B=**R-A=**[(114.6+75)**i**+(80.3-130)**j**]cm = (189.6**i** – 49.7**j**)cm

|**B**|=$[(189.6)^2+(-49.7)^2]^{1/2}$cm = 196 cm

θ = arctg(-49.7/189.6)= -14.7°+ k180°

dove k=0 dato che il vettore **B** giace nel IV quadrante.

Esercizio N. 5

Assegnato il vettore **R**=2**i**+**j**+3**k**, trovare (a) le componenti lungo gli assi x, y e z, (b) il modulo di **R**, (c) gli angoli fra **R** e gli assi x, y e z.

(a)

Ovviamente, R_x=2, R_y=1, R_z=3

(b)

|**R**|=$(4+1+9)^{1/2}=(14)^{1/2}$

(c)

Gli angoli che il **R** forma con gli assi cartesiani si ricavano dai coseni direttori:

$$\mathbf{cos}\alpha=\frac{R_x}{|\mathbf{R}|}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\mathbf{cos}\beta=\frac{R_y}{|\mathbf{R}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{1}{14}}$$

$$\mathbf{cos}\gamma=\frac{R_z}{|\mathbf{R}|}=\frac{3}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{9}{14}}$$

ottenendo che:

α=arccos $(2/7)^{1/2}$=57.68

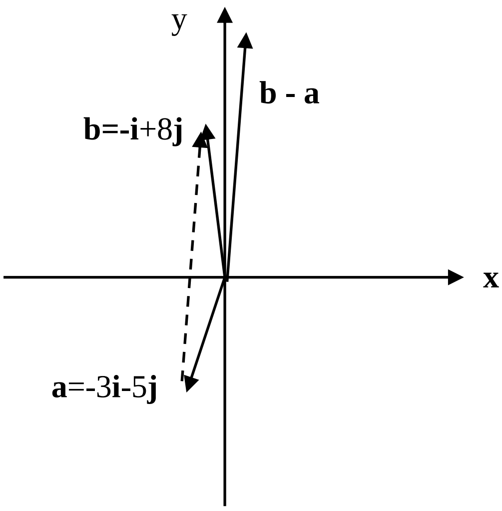
β=arccos $(1/14)^{1/2}$=74.49

γ=arccos $(9/14)^{1/2}$=36.69

Esercizio N. 6

Una particella si muove da un punto nel piano xy avente le coordinate cartesiane (-3,-5)*m* ad un punto di coordinate (-1,8)*m*. (a) Scrivere le espressioni vettoriali per i vettori posizione, nella notazione dei vettori unitari (versori), per questi due punti. (b) Qual è il vettore spostamento?

(a)



(b)

Rappresentando i vettori **a** e **b** nel piano cartesiano si vede immediatamente che il vettore spostamento sarà dato da **b**-**a**:

b-**a** = (-1+3)**i** + (8+5)**j** = 2**i** + 13**j**

Si noti che per poter chiudere la poligonale nel disegno occorre traslare il vettore **b**-**a** parallelamente a se stesso fino a portare la sua origine sulla punta di **a** e la sua punta sulla punta di **b.**

Esercizio N. 7

Dimostrare che i vettori **u** = 6**i** - 4**j** + 2**k**, **v =** 2**i** - 6**j** + 10**k**, **z** = 4**i** + 2**j** - 8**k** formano un triangolo rettangolo.

Perché tre vettori formino un triangolo occorre che sia soddisfatta una delle seguenti due condizioni:

(a) uno di essi sia uguale alla somma degli altri due;
(b) i tre vettori abbiano somma nulla.

Verifichiamo che nel nostro caso è soddisfatta la condizione (a). Infatti è:

$v_x + z_x = \ 6 = u_x$

$v_y + z_y = -4 = u_y$

$v_z + z_z = \ 2 = u_z$

perciò **v** + **z** = **u**

Per vedere se il triangolo formato è rettangolo, calcoliamo i prodotti scalari fra i tre vettori, ovviamente a due a due (poiché non ha senso definire il prodotto scalare di tre vettori): se un prodotto scalare è nullo, allora il triangolo è rettangolo.

u•v = (6)(2)+(-4)(-6)+(2)(10)=56≠0

v•z = (2)(4)+(-6)(2)+(10)(-8)=-84≠0

z•u = (4)(6)+(2)(-4)+(-8)(2)=0

Da quest'ultima espressione si vede come **z** e **u** siano perpendicolari, e come perciò **u**, **v**, **z** formino un triangolo rettangolo.

Esercizio N. 8

Se **u** = **i**+2**j**–**k**, **v** = -**i**+**j**-2**k**, **z**=**i**+**j**-**k**, trovare (a) **u** x **v**, (b) **v** x **u**, (c) (**u**+**v**) x (**u**-**v**), (d) (**u** x **v**) x **z**.

Il prodotto vettoriale, note le componenti dei vettori, è dato dal determinante simbolico:

(a)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

(b)
Invertendo l'ordine dei vettori il prodotto vettoriale cambia segno, poiché si invertono due righe nel determinante simbolico:

v x **u** = 3**i**-3**j**-3**k**.

(c)
E' **u**+**v**=3**j**-3**k** e **u**-**v**=2**i**+**j**+**k** quindi

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 3 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

(d)
Si dimostra che il triplo prodotto vettoriale è dato da:

(u x **v)** x **z=(u•z)v – (v•z)u**

cosicchè otteniamo

(u x **v)** x **z**= (1+2+1)**v**-(-1+1+2)**u**= 4**v**-2**u**= -6**i**-6**k**.
Esercizio N. 9

Se **u** = 3**i**+**j**-3**k**, **v** = **i**-2**j**+**k**, trovare un vettore **w**, di modulo w=5 che sia perpendicolare sia a **u** che a **v**.

Quando due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare deve essere nullo, cioè:

$$\mathbf{w}\bullet\mathbf{u} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w}\bullet\mathbf{v} = 0,$$

quindi indicando con (x,y,z) le componenti del vettore **w** possiamo scrivere:

$$\begin{cases}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\bullet(2\mathbf{i}+1\mathbf{j}-3\mathbf{k})=0\\(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\bullet(1\mathbf{i}-2\mathbf{j}+1\mathbf{k})=0\\\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5\end{cases}$$

(l'ultima equazione ovviamente deriva dalla condizione sul modulo del vettore).
Sviluppando i prodotti otteniamo:

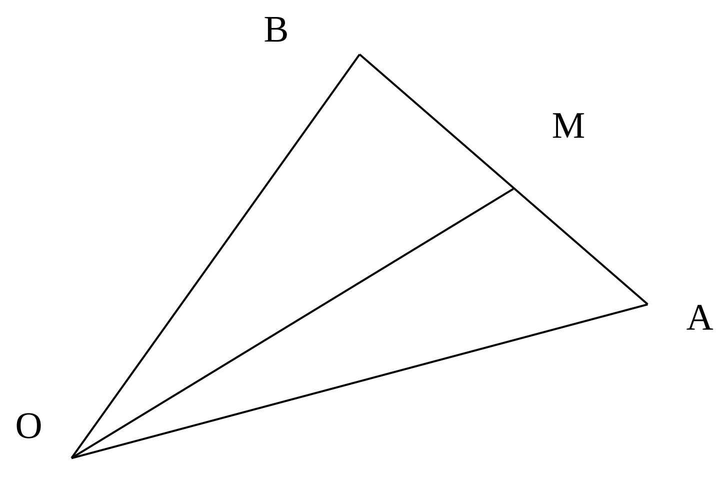
$$\begin{cases}2x+y-3z=0\\x-2y+z=0\\x^2+y^2+z^2=25\end{cases}$$

Dalle prime due equazioni del sistema si ottiene che x=z e y=z; sostituendo questi valori nella terza equazione otteniamo che z=2.89.
Il nostro vettore quindi sarà:

$$\mathbf{w}=2.89\mathbf{i}+2.89\mathbf{j}+2.89\mathbf{k}.$$

Esercizio N. 10

Se due lati di un triangolo sono formati dai vettori **OA** e **OB** quale è la distanza da O del punto medio M del terzo lato?



La distanza del punto O dal punto medio M è data dal modulo del vettore **OM**; ma questo vettore può essere espresso come somma dei vettori **OA** e **AM**:

OM= OA+ AM ;

ricordando che M è il punto medio fra A e B possiamo anche scrivere:

AM = AB/2 = (**OB** – **OA)**/2

quindi per il vettore **OM** otteniamo:

OM= OA+(**OB** – **OA)**/2=(2**OA +OB** – **OA)**/2= (**OB** + **OA)**/2,

per cui la distanza che stiamo cercando vale :

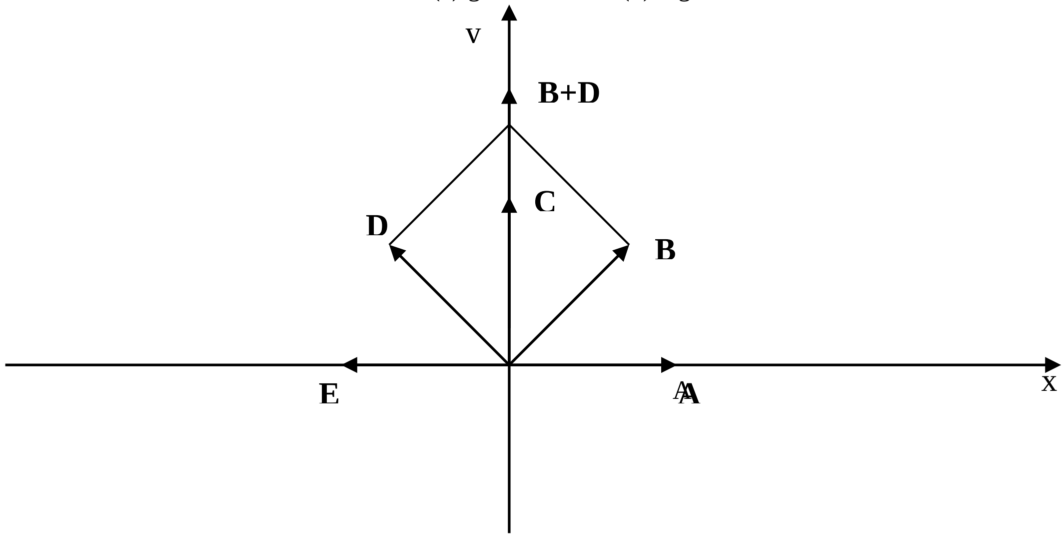
|(**OB** + **OA)**/2|

risultato ben noto in geometria.

Esercizio N. 11

Dati cinque vettori unitari uscenti dall'origine delle coordinate, le cui rispettive direzioni formano angoli di 45° compresi fra θ=0° e θ=180°, determinare la somma: (a) graficamente; (b) algebricamente.

(a)



Il vettore somma **V** può essere espresso come segue:

V = **A**+**B**+**C**+**D**+**E =** (**A**+**E**) + (**D**+**B**) + **C** ;

osservando la figura si vede subito che **A**= **-E** per cui (**A**+**E**)=0 ;

i vettori **D** e **B** formano fra di loro un angolo di 90°, quindi la loro somma sarà data dalla diagonale (parallela all'asse y) del quadrato che essi definiscono, per cui ricordando che essi hanno modulo unitario possiamo scrivere:

(**D**+**B**) = $\sqrt{2}$ **j** .

Il vettore somma quindi sarà:

V = (**D**+**B**) + **C** = $\sqrt{2}$ **j** +1**j** = (1+ $\sqrt{2}$)**j**.

(b)
Gli angoli che i vettori **A, B**, **C, D**, ed **E**, formano con l'asse x sono rispettivamente 0°, 45°, 90°, 135° e 180°; i vettori quindi possono essere espressi come segue:

A=1·cos(0°)**i**+1·sin(0°)**j** = 1**i** + 0**j**
B=1·cos(45°)**i**+1·sin(45°)**j** = $\sqrt{2}/2$ **i** + $\sqrt{2}/2$ **j**
C=1·cos(90°)**i**+1·sin(90°)**j** = 0**i** + 1**j**
D=1·cos(135°)**i**+1·sin(135°)**j** = -$\sqrt{2}/2$ **i** + $\sqrt{2}/2$ **j**
E=1·cos(180°)**i**+1·sin(180°)**j** = -1**i** + 0**j**

Le componenti del vettore somma saranno dati dalla somma delle componenti dei singoli vettori:
V = (1+ $\sqrt{2}/2$ + 0 - $\sqrt{2}/2$ -1)**i** + (0 + $\sqrt{2}/2$ + 1 + $\sqrt{2}/2$ + 0)**j** = 0**i** + (1+$\sqrt{2}$)**j** = (1+$\sqrt{2}$)**j** .

Esercizio N. 12

Quali fra i seguenti vettori sono mutuamente perpendicolare? Le terne di numeri indicano le componenti del vettore.

A(2,1,1); **B**(0,0,2); **C**(1,-2,0); **D**(1,1,-3); **E**(9,5,3)

Quando due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare è nullo, quindi basta verificare tale condizione:

A•B = 2·0+ 1·0+1·2 = 2 ⇒ **A** e **B** non sono perpendicolari;

A•C = 2·1+ 1·(-2)+1·0 = 0 ⇒ **A** e **C** sono perpendicolari;

A•D = 2·1+ 1·1+1·(-3) = 0 ⇒ **A** e **D** sono perpendicolari;

A•E = 2·9+ 1·5+1·3 = 26 ⇒ **A** e **E** non sono perpendicolari;

B•C = 0·1+ 0·(-2)+2·0 = 0 ⇒ **B** e **C** sono perpendicolari;

B•D = 0·1+ 0·1+2·(-3) = -6 ⇒ **B** e **C** non sono perpendicolari;

B•E = 0·9+ 0·5+2·3 = 6 ⇒ **B** e **E** non sono perpendicolari;

C•D = 1·1+ (-2)·1+0·(-3) = -1 ⇒ **C** e **D** non sono perpendicolari;

C•E = 1·9+ (-2)·5+0·3 = -1 ⇒ **C** e **E** non sono perpendicolari;

D•E = 1·9+ 1·5+(-3)·3 = 5 ⇒ **D** e **E** non sono perpendicolari.

Esercizio N. 13

Dimostrare che se uno dei vettori del prodotto scalare **A•B** viene moltiplicato per uno scalare c, l'angolo ϕ compreso fra **A** e **B** resta invariato.

Per definizione di prodotto scalare:

A•B = ABcosϕ ;

ma il prodotto scalare può essere anche espresso tramite la somma dei prodotti delle componenti omonime dei due vettori, quindi possiamo scrivere:

$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\phi$

da cui segue che l'angolo ϕ è dato dalla seguente relazione:

$$\phi = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}\right).$$

Se adesso moltiplichiamo il vettore A **per lo scalare c avremo:**

$(c\mathbf{A})\bullet\mathbf{B} = (cA)B\cos\phi_1$

dove

$(c\mathbf{A}) = cA_x\mathbf{i} + cA_y\mathbf{j} + cA_z\mathbf{k}$ e ϕ_1 indica l'angolo fra i vettori c**A** e **B.**

Esprimendo il prodotto scalare come somma dei prodotti delle componenti omonime otteniamo:

$cA_xB_x + cA_yB_y + cA_zB_z = (cA)B\cos\phi_1$

per cui il nuovo angolo vale:

$$\phi_1 = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{cA_xB_x + cA_yB_y + cA_zB_z}{cAB}\right) = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}\right).$$

L'angolo ϕ_1 quindi coincide con l'angolo ϕ.

Esercizio N. 14

Si consideri il vettore A=**3**x+y**+2**z**. 1) Determinare il modulo di** A**. 2) Costruire il vettore** B **giacente nel piano xy e perpendicolare ad** A**. 3) Costruire il versore** *vers*(B)**. 4) eseguire il prodotto scalare del vettore** C **= 2**x **per** A**.**

1)

$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} = 3.74$

2)

Quando due vettori sono perpendicolare il loro prodotto scalare deve essere nullo, quindi indicando le generiche componenti del vettore B con (B_x,B_y,0) (la terza componente è nulla poiché il vettore giace sul piano xy), possiamo scrivere:

A•B=0

cioè

$3\ B_x + 1\ B_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_y = -3\ B_x$

quindi il vettore **B** (k, -3k, 0), dove k è un qualunque numero reale, è perpendicolare ad **A** e giace nel piano xy.

3)

Per costruire *vers*(**B**) basta calcolare il parametro k che rende unitario il modulo del vettore **B** calcolato al punto 2):

$\sqrt{k^2 + (-3k)^2} = 1$

$\sqrt{10k^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \qquad k = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

quindi abbiamo ottenuto due valori del parametro k a cui corrispondono i due diversi versori

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \;;$$

i due versori ovviamente hanno la stessa direzione (dovendo essere entrambi perpendicolari ad **A** e giacenti sul piano xy) ma verso opposto.

4)

A•C=(3**x+y+**2**z)•**(2**x**)=3·2+1·0+2·0=6

Esercizio N. 15

Dati du vettori, **A** = 3**i**+4**j**-5**k** e **B** = **-i**+2**j**+6**k**, calcolare: a) il modulo di entrambi; b) il prodotto scalare **A•B**; c) l'angolo ϕ formato fra essi; d) i coseni direttori di entrambi; e) il vettore somma ed il vettore differenza; f) il prodotto vettoriale.

a)

$$A=\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=7.07$$

$$B=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}=6.40$$

b)

A•B = 3·(-1)+4·2+(-5) ·6= -25

c)

A•B = ABcosϕ

-25=7.07·6.40·cosϕ

cosϕ = -0.55

ϕ = 123.5°

d)

Per trovare i coseni direttori (definiti come i coseni degli angoli che il vettore forma con gli assi coordinati) basta moltiplicare scalarmente il vettore per ciascuno dei versori del sistema di riferimento:

A•i = A·1·cosα

D'altronde il prodotto scalare si può anche esprimere come somma dei prodotti delle componenti omonime, quindi possiamo scrivere:

A•i = A_x quindi otteniamo:

A_x = A·1·cosα

cosicchè il coseno direttore rispetto all'asse x vale:

$$\cos\alpha = A_x / A = \frac{3}{\sqrt{50}};$$

per gli altri coseni direttori otteniamo:

$$\cos\beta = A_y / A = \frac{4}{\sqrt{50}}; \qquad \cos\gamma = A_z / A = \frac{-5}{\sqrt{50}};$$

Analogamente per i coseni direttori del vettore **B** avremo:

$\cos\alpha = B_x / B = \dfrac{-1}{\sqrt{41}}$; $\cos\beta = B_y / B = \dfrac{2}{\sqrt{41}}$; $\cos\gamma = B_z / B = \dfrac{6}{\sqrt{41}}$;

e)

A + **B** = (3-1)**i** + (4+2)**j** + (-5+6)**k** = 2**i**+6**j**+**k**

A - **B** = (3+1)**i** + (4-2)**j** + (-5-6)**k** = 4**i**+2**j**-11**k**

f)

Per calcolare il prodotto vettroriale **A^B** utilizziamo il determinante simbolico sviluppato rispetto alla prima riga con il teorema di Laplace:

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (24+10)\mathbf{i} - (18-5)\mathbf{j} + (6+4)\mathbf{k} = 34\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

Esercizio N. 16

Trovare il volume del parallelepipedo i cui spigoli sono descritti dai vettori: **A**=**i**+2**j**, **B**=4j, **C** = **j**+3**k** uscenti dall'origine.

Il volume V del parallelepipedo può essere calcolato come valore assoluto del prodotto misto fra i tre vettori:

$$V = |\mathbf{A}*(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1*(4*3-0*1) - 2*(0*3-0*0) + 0*(0*1-4*0) = 12$$

Esercizio N. 17

Dati due vettori tali che **A+B** = 11**i**-**j**+5**k** ed **A-B** = -5**i**+11**j**+9**k**, determinare (a) **A** e **B**, (b) l'angolo compreso tra **A** e **A+B**.

(a)

A+B = (A_x+B_x)**i**+(A_y+B_y)**j**+(A_z+B_z)**k** = 11**i**-**j**+5**k**

A - B = (A_x-B_x)**i**+(A_y-B_y)**j**+(A_z-B_z)**k** = -5**i**+11**j**+9**k**

quindi eguagliando le singole componenti otteniamo:

$$\begin{cases} A_x + B_x = 11 \\ A_x - B_x = -5 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_y + B_y = -1 \\ A_y - B_y = 11 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_z + B_z = 5 \\ A_z - B_z = 9 \end{cases} ;$$

Sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni di ciascun sistema si ottiene:

$$\begin{cases} A_x = 3 \\ B_x = 8 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_y = 5 \\ B_y = -6 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_z = 7 \\ B_z = -2 \end{cases} ;$$

cosicchè

A = 3**i**+5**j**+7**k** ; **B** = 8**i**-6**j**-2**k** .

(b)

|**A**| = $\sqrt{9+25+49} = 9.11$

|A+B| = $\sqrt{121+1+25} = 12.12$

A•(**A+B**)= 9.11*12.12*cosϕ

dove ϕ è l'angolo fra i vettori **A** ed (**A+B**);

d'altronde

A• (**A+B**)=3*11+5*(-1)+7*5=63

quindi

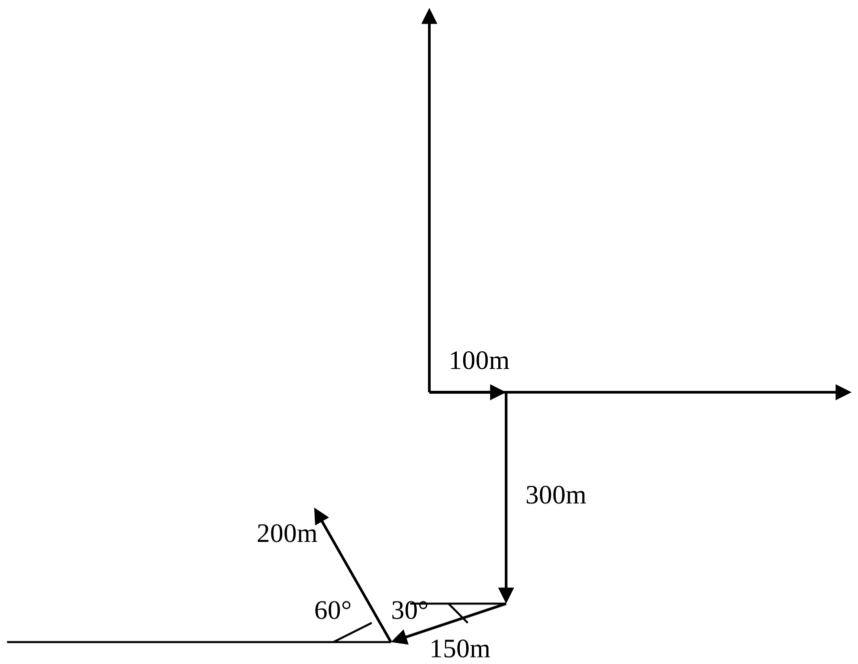
9.11*12.12*cosϕ = 63

cosϕ = 63/110.4 = 0.57

ϕ = 55.2°

ESERCIZIO (Serway pag 35 n°39)

Una persona che va a fare una passeggiata segue l'itinerario mostrato in figura:



L'escursione totale consta di quattro tratti rettilinei. Alla fine della passeggiata, qual è lo spostamento risultante misurato a partire dall'origine?

$A_x=100$ $A_y=0$
$B_x=0$ $B_y=-300$
$C_x=-150\ (3)^{1/2}/2$ $C_y=-150/2 = -75$
$D_x=-100$ $D_y=100(3)^{1/2}$

$R_x= 100 + 0 - 150(3)^{1/2}/2 – 100 = -150(3)^{1/2}/2 = -129.9$ m
$R_y= 0 – 300 – 75 + 100(3)^{1/2} = -375+100(3)^{1/2} = -201.8$ m

$R= (R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = 240$

$tg\theta = R_y/R_x = 1.553$

$\theta = arctg(1.553) = 57° + k\ 180°$

Poiché entrambe le componenti del vettore **R** sono negative, tale vettore si trova nel III quadrante cosicché in questo caso dobbiamo scegliere k=1 dal che segue:

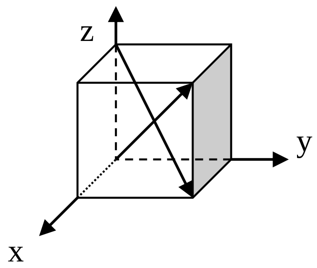
$\theta = 57° + 180° = 237°$

Ecco perché, negli esercizi di fisica, non ci può limitare ad utilizzare brutalmente il risultato fornitoci dalla calcolatrice!

ESERCIZIO

Qual è l'angolo d'intersezione tra due diagonali interne di un cubo?

Se consideriamo un cubo di spigolo unitario i cui lati si incontrano nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Possiamo individuare, ad esempio, la diagonale d_1 che unisce l'origine O=(0,0,0) con il vertice opposto V=(1,1,1) e la diagonale d_2 che invece congiunge il punto di coordinate (0,0,1) con il punto di coordinate (1,1,0).



Vettorialmente avremo:

$\mathbf{d_1} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{d_2} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

dove il segno – nella componente z di $\mathbf{d_2}$ deriva dal fatto che tale componente è diretta in verso opposto all'asse z positivo.

Chiaramente, entrambe le diagonali avranno modulo pari a $(3)^{1/2}$ cosicché:

$\mathbf{d_1} \bullet \mathbf{d_2} = d_1\, d_2 \cos\phi = (3)^{1/2}\,(3)^{1/2} \cos\phi = 3 \cos\phi$

D'altronde il prodotto scalare si può anche eseguire come somma dei prodotti delle componenti dello stesso nome:

$\mathbf{d_1} \bullet \mathbf{d_2} = 1{*}1 + 1{*}1 + 1{*}(-1) = 1$

Confrontando le ultime due espressioni si ottiene che

$3 \cos \phi = 1$ cioè

$\cos \phi = 1/3$ da cui si ricava l'angolo d'intersezione cercato $\phi = 70.5°$

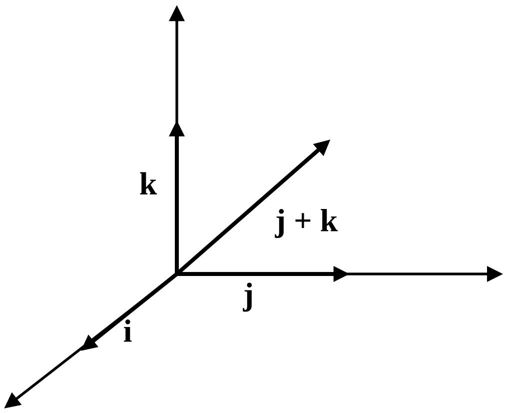
Chiaramente avremmo potuto scegliere per $\mathbf{d_2}$ il vettore

$\mathbf{d_2} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

In questo caso $\cos \phi' = -1/3$ da cui $\phi' = 109.5°$, che è ovviamente il supplementare di ϕ.

ESERCIZIO

Dimostrare, utilizzando i vettori **a** = **i**, **b** = **j** e **c** = **j** + **k** che per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa.



Per rispondere al quesito occorre dimostrare che **a^(b^c) ≠ (a^b)^c**.

Ora, i vettori **b** e **c** non hanno componenti lungo l'asse X e pertanto giacciono entrambi sul piano YZ; pertanto, il loro prodotto vettoriale **(b^c)** darà luogo ad un vettore ortogonale al piano YZ che, come tale, avrà componenti solo lungo l'asse X, cioè sarà del tipo k**i** dove k è uno scalare. Appare dunque evidente che tale vettore è parallelo al vettore **a** cosicchè **a^(b^c)**=0.

Analogamente i vettori **a** e **b** individuano il piano XY e pertanto il vettore **(a^b)** sarà ortogonale a tale piano e cioè sarà un vettore parallelo all'asse Z; **c** invece si trova lungo la bisettrice del piano YZ e come tale non è certamente parallelo al vettore **(a^b).** Cosicché **(a^b)^c**≠0 e quindi ovviamente **a^(b^c) ≠ (a^b)^c**. Analogo risultato si sarebbe ottenuto svolgendo esplicitamente il calcolo dei prodotti vettoriali ad esempio col metodo del determinante simbolico.

ESERCIZIO

Si faccia uso della definizione di prodotto scalare **a•b**=abcosϕ e della relazione **a•b**=$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ per calcolare l'angolo tra i due vettori seguenti:

a=3**i**+3**j**-3**k**

b=2**i**+**j**+3**k**

Per utilizzare la definizione di prodotto scalare occorre calcolare i moduli dei due vettori:

$a=(9+9+9)^{1/2} = 3\ (3)^{1/2}$

$b=(4+1+9)^{1/2} = (14)^{1/2}$

mentre il calcolo della somma dei prodotti delle componenti omologhe fornisce:

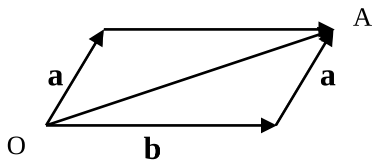
a*b=3*2 + 3*1 – 3*3=0

da cui segue che

$3\,(3)^{1/2}\,(14)^{1/2}\cos\phi = 0$ cioè

$\cos\phi = 0$ $\phi=\pi/2$

ESERCIZIO
Due vettori **a** e **b** si sommano; dimostrare che il modulo del vettore risultante non può essere maggiore di **a+b** né minore di |**a-b**|.



La lunghezza del segmento OA è il modulo del vettore **a+b**. Ma i tre vettori **a**, **b** ed **OA** formano un triangolo e, in ogni triangolo, ciascun lato ha ampiezza minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Cosicché dalla geometria segue l'asserto:

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| < |\mathbf{a}+\mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

ESERCIZIO
Quali sono le proprietà di due vettori **a** e **b** tali che:

1) **a + b = c** ed a + b = c

2) **a + b = a - b**

3) **a + b =c** ed $a^2 + b^2 = c^2$

1) i vettori **a** e **b** hanno stessa direzione e stesso verso
2) il vettore **b** è nullo
3) i vettori **a** e **b** sono ortogonali.

ESERCIZIO

Il momento di una forza **F**, applicata nel punto P, calcolato rispetto ad un polo O, è dato da:

$$\mathbf{M_o} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}.$$

Se il polo O coincide con l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale, e il punto P ha coordinate (3, -1, 0), sapendo che è **F**=(2,1,0), trovare il vettore $\mathbf{M_o}$.

Per la definizione stessa di momento di una forza rispetto ad un polo tale vettore sarà ortogonale al piano individuato da **OP** ed **F** (che è il piano XY) e sarà rivolto verso l'alto. In formule si ha che:

$$\vec{M}o = OP \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\,\hat{k}$$

e dunque $\mathbf{M_o}$ = 5**k**.

Gli angoli θ misurati con la consueta regola (>0 in senso antiorario e <0 in senso orario) non costituiscono dei vettori perché la somma di angoli finiti non è commutativa come si evince dalla figura (da scannerizzare).

OSSERVAZIONI

Non ha senso iterare il prodotto scalare e pertanto non ha senso parlare di proprietà associativa riferita al prodotto scalare. Infatti la scrittura **a*b*c** è priva di significato poiché **a*b** dà come risultato uno scalare ma il prodotto scalare è definito tra due vettori e ciò dunque ci impedisce di andare avanti: ciò che otterremmo infatti sarebbe il prodotto semplice tra lo scalare **a*b** ed il vettore **c** ma non il prodotto scalare **a*b*c**.

Dati due vettori **a** e **b** che formano rispettivamente un angolo ϕ_a e ϕ_b col semiasse positivo delle ascisse, l'angolo tra essi sarà ovviamente dato dalla differenza $\phi_a-\phi_b$ e pertanto il prodotto scalare tra i due vettori sarà dato per definizione dal prodotto dei rispettivi moduli per il coseno dell'angolo compreso cioè

$$a*b = \mathbf{ab\ \cos(\phi_a-\phi_b) = ab\cos\phi_a\ \cos\phi_b + ab\sin\phi_a\ \sin\phi_b = a\cos\phi_a\ b\cos\phi_b + a\sin\phi_a\ b\sin\phi_b = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

col che si è dimostrato (per semplicità con vettori nel piano) che, dalla definizione di prodotto scalare si ricava la relazione **a*b** = $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.